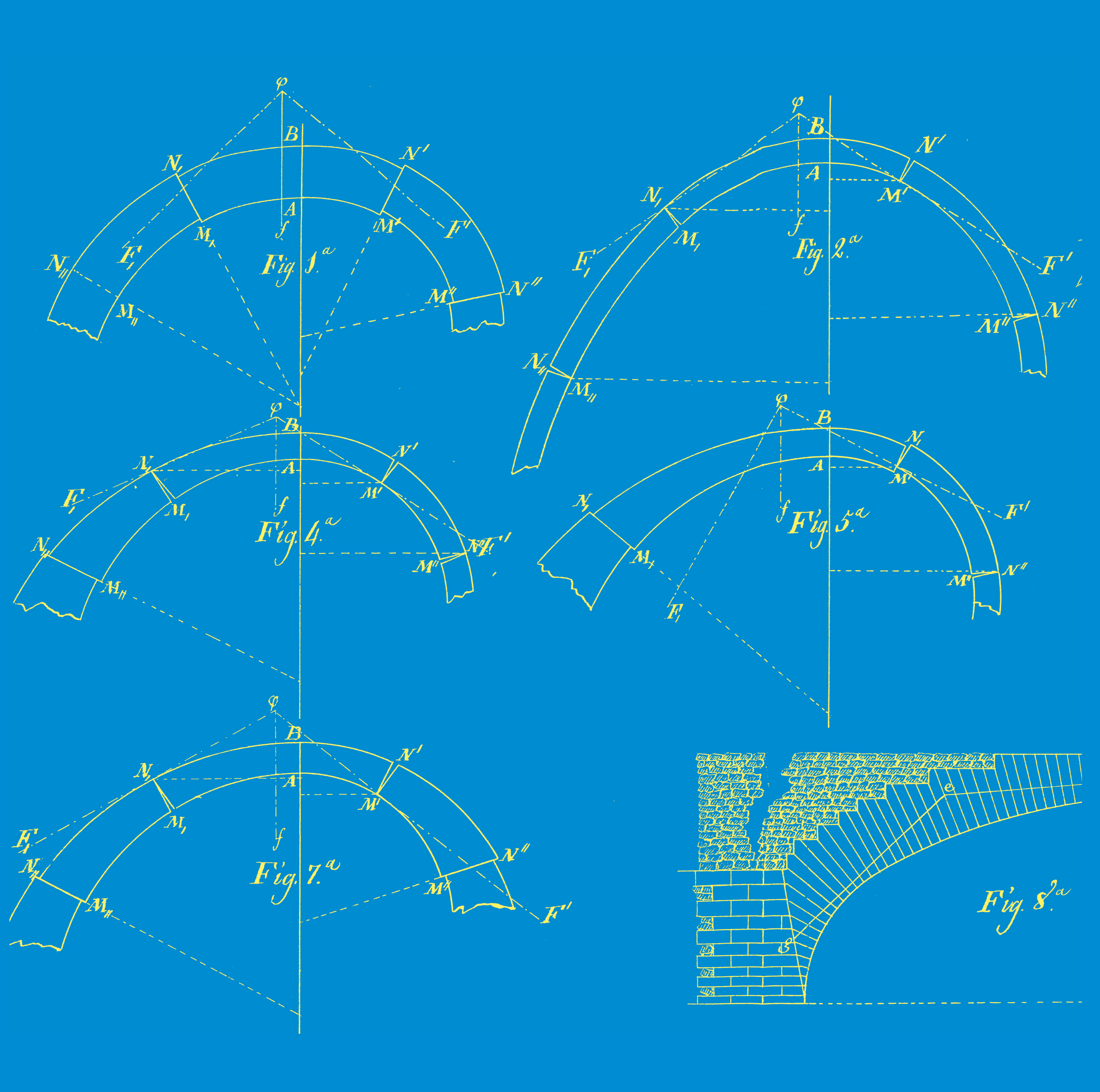
Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas

Joaquín Monasterio



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS
CANALES Y PUERTOS

INSTITUTO JUAN DE HERRERA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE ARQUITECTURA DE MADRID

TEXTOS SOBRE TEORÍA E HISTORIA DE LAS CONSTRUCCIONES
Colección dirigida por Santiago Huerta Fernández

A. Buchanan et al. (Eds.). **Robert Willis. Science, Technology and Architecture in the Nineteenth Century**
J. W. Campbell et al. (Eds.). **James Essex. Architect and Carpenter** (en preparación)
A. Choisy. **El arte de construir en Roma**
A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**
A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**
A. Choisy. **Historia de la arquitectura**
P. Fuentes e I. Wouters (Eds.). **Brick vaults and Beyond. Transformation of a historical structural system**
I. J. Gil Crespo. (Ed.). **Historia, arquitectura y construcción fortificada**
J. Girón y S. Huerta. (Eds.) **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**
R. Guastavino. **Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura**
J. Heyman. **Análisis de estructuras: un estudio histórico**
J. Heyman. **El arco de fábrica**
J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica**
J. Heyman. **Equilibrio de cáscaras**
J. Heyman. **Geometry and Mechanics of Historic Structures**
J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**
J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**
J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. 2 vols.**
J. Heyman. **Vigas y pórticos**
S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica**
S. Huerta (Ed.). **Las bóvedas de Guastavino en América**
S. Huerta (Ed.). **History of the Theory of Structures. Essays in Honour of Jacques Heyman**
J. Ibáñez (Coord., Ed.). **Trazas, muestras y modelos de tradición gótica en la Península Ibérica, ss. XIII al XVI**
J. Ibáñez y B. Alonso. **El cimborrio en la arquitectura hispánica medieval y moderna**
J. M. Molero et al. (Eds.). **La construcción fortificada medieval**
J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas**
J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII**
G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**
H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**
A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**
E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**
R. Willis. **La construcción de las bóvedas en la Edad Media**

Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas

Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas

Joaquín Monasterio

Edición a cargo de:
Santiago Huerta y Federico Foce

con la colaboración de:
Alejandra Albuerne

Ensayos introductorios:
Federico Foce y Santiago Huerta
Fernando Sáenz Ridruejo
Avelino Samartin Quiroga

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid

ISBN: 978-84-9728-613-8

Depósito Legal: M-16763-2023

Cubierta: Fragmento de la primera lámina del manuscrito

Fotocomposición e impresión:
Gracel Asociados SLL
28018 Alcobendas

Índice

Prólogo

En el catálogo general de la Biblioteca de la Escuela de Caminos de 1912 aparece en la sección de «Mecánica aplicada a las construcciones», en el apartado sobre «bóvedas y puentes de fábrica» la mención a un trabajo de un tal Monasterio con el título *Nueva teoría sobre el empuje de bóvedas*, y se indica que es un «Manuscrito de principios del siglo XIX». Este manuscrito ya se citaba en el primer tomo del *Diccionario general de Arquitectura e Ingeniería* de Clairac y Sáenz de 1877. La referencia aparece en la «bibliografía española» al final del artículo «Bóveda» como perteneciente a la Biblioteca de Eduardo Saavedra. No hay ninguna otra mención a este manuscrito en ningún trabajo posterior. El propio Saavedra, quizá el teórico español más importante sobre la estabilidad de las construcciones en su época, tampoco lo menciona en ninguna de sus numerosas publicaciones sobre bóvedas.

Para la historia reciente del manuscrito es inevitable hacer referencia a parte de mi trabajo de investigación, centrado en los arcos y bóvedas de fábrica. En la segunda mitad de los años 1980 me encontraba investigando en la Biblioteca de Caminos estudiando las fuentes históricas para mi tesis sobre arcos y bóvedas en España; allí, gracias a la amabilidad de los conserjes Bernabé y Miguel, tuve fácil acceso a los riquísimos fondos antiguos sobre mecánica y estabilidad de las construcciones. Consultando el Catálogo de 1912 vi la mención a Monasterio y su «Nueva teoría sobre el empuje de bóvedas», pero la ficha correspondiente faltaba en el fichero y no se podía localizar el documento. Conocía bastante bien la colocación de los libros en el depósito y busqué infructuosamente en el apartado donde estaban colocados los libros sobre «estabilidad de las construcciones» y bóvedas de hacia 1800 (entre otros estaban allí las traducciones de las memorias de Bossut y Prony de 1805).

No aparecía el manuscrito, urgía terminar la tesis, y abandoné la búsqueda. Leí la tesis en 1990 y empecé a dedicarme intensamente a la preparación de mis clases en la Escuela de Arquitectura. Pero el manuscrito de Monasterio seguía en mi cabeza como una tarea pendiente. Decidí entonces, creo que en el año 1992, dedicar el tiempo necesario hasta encontrarlo. No recuerdo bien —han pasado tres decenios— cómo lo encontré. Con seguridad en los libros de registro de la biblioteca hubiera alguna indicación. El manuscrito finalmente apareció en una caja, lejos de los libros sobre estabilidad y bóvedas.

Inmediatamente, pedí permiso y realicé una copia de trabajo. El libro estaba en una caja con otros manuscritos del siglo XIX. El manuscrito estaba encuadernado, con tapas blandas. La letra era menuda y apretada, y había numerosas y extensas fórmulas matemáticas; las páginas estaban sin numerar. Como era una copia de trabajo, amplié las fotocopias a tamaño A4 para facilitar su estudio, y con una plumilla numeré las páginas, imitando la letra antigua. Desafortunadamente, no hice una descripción bibliográfica completa, anotando el tamaño, tipo de papel, las cubiertas, etc.

Conocía bastante bien la historia de la teoría de bóvedas, principalmente gracias a los libros del profesor Heyman. En seguida me di cuenta de la enorme importancia del manuscrito, donde el autor atacaba con absoluta generalidad y gran profundidad, la estabilidad de las bóvedas, incluyendo por primera vez las bóvedas asimétricas, la posibilidad de fallos por rotación, deslizamiento y combinaciones de ambos, y la posible fractura de los estribos en el colapso. Monasterio había tomado las ideas básicas de la memoria de Coulomb de 1773, ignorada por los ingenieros hasta el decenio de 1820 —año en que Audoy la recupera para formular una teoría limitada a arcos simétricos y fallos por rotación. No es exageración decir que Monasterio se adelantó varios decenios a sus coetáneos.

Era evidente que el manuscrito merecía ser publicado. Consulté con Ricardo Aroca, Presidente del Instituto Juan de Herrera y con Antonio de las Casas, Gerente del CEHOPU, y estuvieron de acuerdo en incluirlo la serie publicaciones sobre Historia de la Construcción que coeditaban el Instituto y el CEHOPU. En 1998 Antonio de las Casas me consiguió, via Miguel Arenillas, información sobre el misterioso Monasterio, que suministró generosamente Fernando Sáenz Ridruejo.

No encontraba tiempo para realizar un análisis detallado de la teórica de Monasterio, y me limité a estudiar algunas partes más familiares —por ejemplo el

colapso de arcos por formación de articulaciones. Fue también tema de estudio en el curso de doctorado de 2002 y el alumno Francisco Prieto Castrillo realizó una primera transcripción del manuscrito, añadiendo unas páginas de comentario a su contenido. Finalmente la celebración del *First International Congress on Construction History* en Madrid en 2003 me pareció una buena oportunidad para divulgar el manuscrito. Propuse al profesor Federico Foce de la Universidad de Génova colaborar en esta tarea, por su gran conocimiento de la teoría de bóvedas, y la amistad que nos unía.

Fui a la Biblioteca de Caminos a consultar de nuevo el manuscrito original para completar los datos bibliográficos. Como siempre, su directora entonces Concepción García Viñuela, me atendió magníficamente. Para mi sorpresa y consternación, ¡el manuscrito había desaparecido! Afortunadamente disponía de mi fotocopia de trabajo; inmediatamente proporcioné otra a la Biblioteca de Caminos. Por unos años otras tareas me distrajeron de Monasterio; también, la enorme dificultad de su estudio era un freno.

Era urgente poner a disposición de los estudiosos el trabajo de Monasterio y, de nuevo con Federico Foce, empecé a preparar una edición. El Instituto Juan de Herrera propuso en 2009 la publicación al Colegio de Ingenieros de Caminos, que encargó a Fernando Sáenz Ridruejo y Avelino Samartin sendos ensayos para incorporarlos al libro (ahora se incluyen actualizados en la presente edición). El proyecto era ambicioso: se pensaba, no sólo publicar la transcripción y el original del manuscrito, sino una traducción al inglés y ensayos adicionales por otros estudiosos, además de los ya citados de Sáenz y Samartin. El Instituto Juan de Herrera contrató a la ingeniera civil por Cambridge Alejandra Albuerne que revisó con enorme cuidado la transcripción provisional citada antes, así como todo el extenso aparato matemático. Esta transcripción se pasó a la imprenta y sufrió hasta tres revisiones, la última con fecha de 10 de marzo de 2010. A finales de ese mismo año contacté en un Congreso con la Profesora Anna Sinopoli, de la Universidad de Roma La Sapienza, cuyo interés por los problemas intrincados de mecánica de sólidos conocía. Le pasé una copia del manuscrito y quedamos en hablar para una posible contribución suya al libro. Publiqué con Alejandra Albuerne una corta ponencia. En 2019 contacté otra vez con Anna Sinopoli y Danila Aita, con la intención de resucitar de nuevo el libro. La pandemia y la falta de fondos pararon el proyecto. La parte buena

es que las profesoras Sinopoli y Aita trabajaron sobre el manuscrito y finalmente publicaron varios artículos que forman ya un corpus sobre los problemas más difíciles planteados por Monasterio.

* * *

Hace un año Ricardo Aroca me avisó del cierre inminente del Instituto Juan de Herrera, vista la imposibilidad de incorporarlo a la Escuela de Arquitectura a pesar de sus continuados esfuerzos en este sentido. Por supuesto, me puse frenéticamente a buscar proyectos interrumpidos que se pudieran completar. Cuando entre las montañas de papeles encontré la citada última transcripción de marzo de 2010, ya formateada en la imprenta, me pareció que había que volver a intentar, ahora o nunca, el proyecto publicar a Monasterio. Javier León, con quien comparto un profundo interés sobre los puentes en arco de fábrica, me puso en contacto con José Miguel Atienza, Director de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos, que mostró un gran entusiasmo por el proyecto, como también lo hizo la actual bibliotecaria de la Escuela de Caminos Patricia Roque Padrino y su ayudante Carmen Delgado, y el actual subdirector de Acreditación, Patrimonio y Calidad, Manuel Romana García. Nos pusimos en contacto con María Boyer Lagos, Directora de la Biblioteca Universitaria de la UPM, quien con enorme celeridad y eficacia nos consiguió la pertinente autorización del Rector para la publicación. Finalmente, volví a contactar con Federico Foce que acogió con entusiasmo retomar el trabajo de edición. Con él he trabajado los últimos meses y sin su ayuda, su intenso y minucioso trabajo, no hubiera sido posible llevar la tarea a buen término. Agradecemos al arquitecto Michela Giorgi los dibujos de nuestro ensayo y su Apéndice 3.

Este largo prólogo sólo pretende ilustrar la cantidad de personas que han colaborado desinteresadamente a lo largo de varios decenios en la publicación del Manuscrito de Joaquín Monasterio, sin duda un joya, una pieza rara y preciosa, dentro de la historia de la teoría de las estructuras, y en particular dentro de la teoría de arcos y bóvedas de fábrica.

A todos los citados, y a aquellos que haya podido inadvertidamente olvidar, que han colaborado en esta tarea, vaya mi más profundo agradecimiento.

Santiago Huerta

En Madrid, a 7 de agosto de 2023

Nota editorial

La presente edición pretende poner al alcance de los estudiosos la teoría de bóvedas de Joaquín Monasterio, escrita muy probablemente entre 1805 y 1809. Se trata de una teoría completamente original y que muestra un avance de unos cincuenta años sobre sus coetáneos.

El manuscrito permaneció olvidado en una caja de la Biblioteca de la Escuela de Caminos de Madrid hasta que fue redescubierto a principios de los años 1990. Desafortunadamente el original está perdido y lo que se reproduce en este libro es una fotocopia de trabajo hecha en el momento de su redescubrimiento.

Se desconocen por tanto las características del manuscrito: su tamaño, el tipo de papel, etc. Sólo tenemos la mención del Catálogo de la Biblioteca de Caminos de 1912: «MONASTERIO.– Nueva teoría sobre el empuje de bóvedas. (Manuscrito de principios del siglo XIX). 1 vol. 4°». Hay varios Monasterio, y quien identificó al autor, Joaquín Monasterio fue Fernando Sáenz en 1998 (véase el Prólogo y el ensayo de Sáenz en este libro).

En la transcripción se ha modernizado la ortografía con el fin de facilitar su lectura y estudio, y también para facilitar su traducción a otros idiomas, dado que el libro por deseo expreso del actual Director de Caminos, José Miguel Atienza, se pondrá en abierto en Internet.

La historia detallada de una publicación que se ha demorado más de dos decenios está en el Prólogo. En los últimos meses la revisión definitiva ha sido realizada por uno de los editores (Federico Foce). Como es natural se han encontrando numerosas erratas de copia de los distintos borradores que Monasterio hubo de manejar en un texto de tal complejidad. Estas erratas se han recogido en una lista al final del libro. En la transcripción las erratas se han corregido.

Santiago Huerta (Madrid) y Federico Foce (Génova)
7 de agosto de 2023

Una preciosa pieza que faltaba en la historia de la mecánica estructural: La *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas* de Monasterio

Federico Foce
Santiago Huerta

Quien se enfrenta a la *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas* de Monasterio con un bagaje suficientemente informado del desarrollo histórico de los estudios sobre la estabilidad de las estructuras abovedadas de fábrica no puede evitar hacerse preguntas movido por un sentimiento entre el asombro y el desagrado.

Por ejemplo, ¿de dónde surgió la idea original de identificar los modos de colapso de los arcos no simétricos mediante permutaciones de las letras *t* y *r* que indican el movimiento de traslación o rotación de las dovelas que intervienen en un mecanismo?

¿Qué desarrollo diferente podría haber tenido la teoría de las bóvedas de fábrica si el enfoque 'cinemático' de Monasterio hubiera entrado en la literatura científica junto al enfoque 'estático' favorecido por Coulomb y sus epígonos del siglo XIX?

¿Por qué el contenido de aquel precioso manuscrito —que pasó por las manos de dos expertos ingenieros como Francisco Travesedo y Eduardo Saavedra— nunca entró en la formación científica de los alumnos de la Escuela de Caminos, donde ambos eran profesores?

¿Por qué el propio Saavedra, último poseedor del manuscrito antes de donarlo a la Escuela de Caminos, no promovió su publicación impresa, del mismo modo que se interesó por traducir al castellano la *Instruction sur la stabilité des voûtes*

et des murs de revêtement de Michon de 1843 y publicarla en 1860 con la adición de nuevos apéndices?

No es fácil encontrar respuestas razonadas y convincentes a estas preguntas y, como se desprende de la nota de Sáenz en este volumen, la oscura biografía del propio Monasterio no ayuda en este sentido. La única certeza es que el manuscrito existe o, mejor dicho, que ha resurgido a la luz tras más de dos siglos de silenciosa espera.

Lo único cierto, decíamos, es que existe un manuscrito titulado *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas* y que su interés científico merece una atención absoluta tanto desde el punto de vista historiográfico como teórico.

En este sentido, la obra de Monasterio ya ha sido objeto de investigaciones parciales, partiendo de un primer informe de los autores de esta nota presentado en el I Congreso Internacional de Historia de la Construcción celebrado en Madrid en enero de 2003 (Huerta y Foce 2003), seguido de sendos estudios de Avelino Samartin y Fernando Sáenz en 2009, reproducido en este volumen y de un trabajo posterior sobre el análisis realizado por Monasterio para el mecanismo de colapso por rotación pura (Albuerne y Huerta 2010).

Más recientemente, por invitación de uno de los autores, Anna Sinopoli y Danila Aita han investigado desde un punto de vista teórico los tres primeros capítulos del manuscrito, relativos a los mecanismos no simétricos traslacional, rotacional y mixto, ofreciendo una importante revisión del enfoque 'cinemático' de Monasterio en comparación con el enfoque alternativo 'estático' de Coulomb (Aita y Sinopoli 2019, 2020, 2021).

Exactamente veinte años después del primer informe citado, este volumen pone por fin a disposición de los historiadores y estudiosos de la mecánica estructural el texto original del manuscrito, acompañado de su transcripción, de las mencionadas contribuciones de Sáenz y Samartin y de algunos Apéndices añadidos a esta nota y especialmente preparados para futuros lectores.

La esperanza es que la admirable *Nueva teorica* de Monasterio se convierta en el punto de partida de nuevas reflexiones científicas y encuentre finalmente su merecido lugar en la historia de la mecánica estructural.

DOS LÁMINAS, UN PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN

A partir de una simple inspección de las dos láminas que acompañan al texto de la *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas*, no es difícil darse cuenta de la originalidad del enfoque ‘cinemático’ de Monasterio y de la generalidad de su análisis del colapso.

Por ejemplo, en la primera lámina encontramos siete figuras de mecanismos de colapso (con un grado de libertad) para arcos no simétricos (Lámina 1, Figs. 1–7), un tema raramente investigado en toda la literatura científica sobre la estabilidad de bóvedas de fábrica y probablemente nunca abordado antes que él.

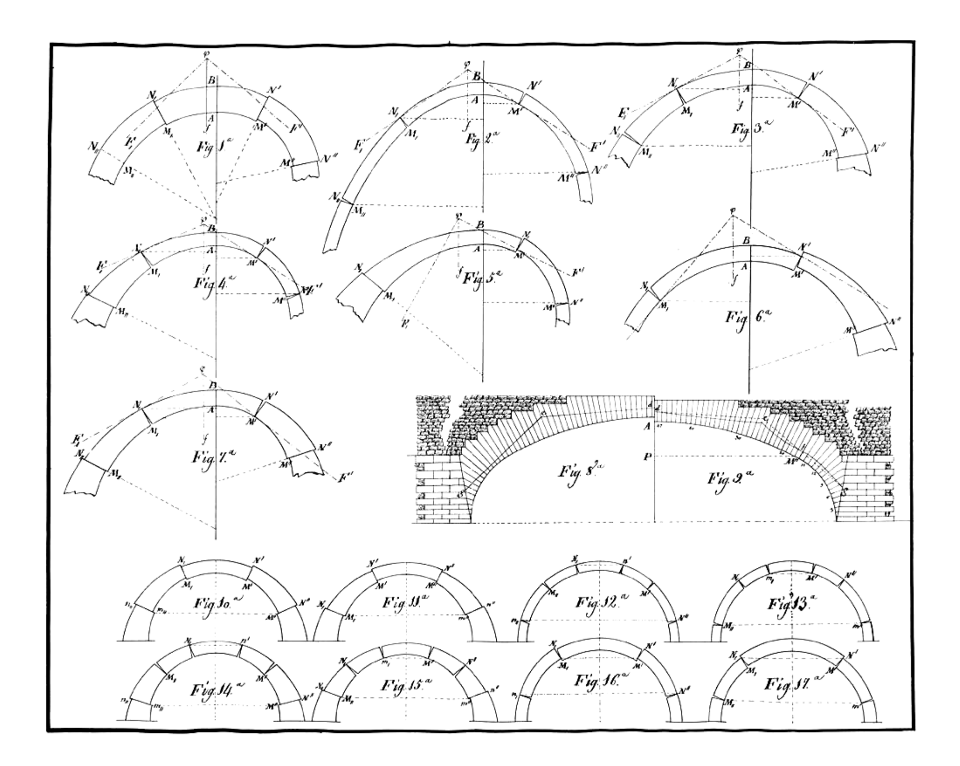


Figura1. Primera lámina de la *Nueva teorica* de Monasterio

En la misma lámina, los modos de colapso rotacional y mixto simétricos (Lámina 1, Figs. 12–15) muestran una característica más general con respecto a los esquemas habituales con cuatro dovelas y una junta de rotura en la clave. Además, los arcos están dibujados con espesores diferentes y variables en función del tipo de mecanismo de colapso. Esta elección gráfica revela un profundo conocimiento de las circunstancias en las que un determinado mecanismo es más probable que otro.

El dibujo del puente antes y después del descentramiento (Figs. 8–9) implica un enfoque centrado en la interpretación del comportamiento de las estructuras reales a través de las leyes de la mecánica.

La segunda lámina contiene algunas figuras que sugieren el estudio del análisis de colapso del sistema (simétrico) «arco-estribo» considerando la formación de líneas diagonales de fractura dentro de la fábrica tanto del relleno como del estribo (Lámina 2, Figs. 21–25), enfoque que requiere nuevas conclusiones relevantes sobre el valor de los pesos realmente involucrados en el mecanismo de colapso y el espesor mínimo resultante del estribo.

En resumen, se trata de un amplio programa de investigación sobre la estabilidad de las estructuras abovedadas de fábrica que se organiza según el siguiente índice:

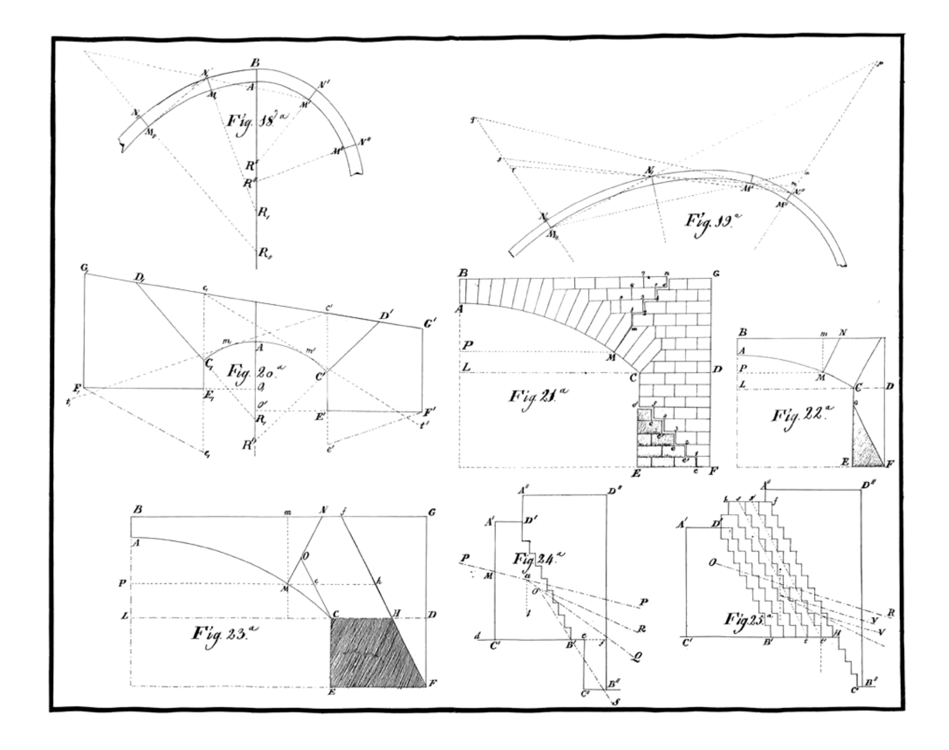


Figura 2. Segunda lámina de la *Nueva teorica* de Monasterio

LA *INTRODUCCION*

Leyendo la *Introduccion* podemos comprender fácilmente que Monasterio era perfectamente consciente de la novedad de su aportación respecto a lo que se conocía sobre el tema, como el mismo título *Nueva teorica* sugiere. Escribe que la teoría del arco de fábrica ha sido tratada «hasta el presente con tan poca poca exactitud y extension, no obstante de tener una aplicacion mui inmediata á la practica, y ser su utilidad de las mas conocidas» (p.3). Añade que algunos autores «solo se extienden à dar reglas practicas» dando nada mas que «una confusa mezcla de principios de Geometria y de Estatica, mal intendidos y aplicados»; otros autores han desarrollado «calculos fundados en hipotesis falsas, ó formulas inutiles, tanto por la arbitrariedad y restricciones con que están sacadas, como por que solo sirven para impedir algunos movimientos, y no los que mas comunmente adquieren las bovedas». Además, estos últimos autores «creyeron que para

asegurarse de la solidez de un arco, bastaba resolver dos cuestiones que se refiriesen à impedir separadamente los movimientos de traslacion y rotacion», despreciando así la posibilidad de modos de colapso mixtos.

Monasterio parte de estos comentarios críticos con la clara intención de establecer una teoría general del análisis del colapso de los arcos de fábrica de acuerdo con el siguiente método original de investigación:

> Sabemos que un arco es el agregado de varios cuerpos, à quienes se dà el nombre de dovelas, capaces por su figura y colocacion de moverse de diferentes maneras, y al mismo tiempo que para reducir al estado de reposo un sistema de cuerpos ligados entre si y solicitados por varias fuerzas, es necesario tener tantas condiciones que satisfacer, cuantos movimientos diferentes se pueden concebir en èl: asi, pues, si la teorica de Bovedas ha de tener por objeto impedir que los arcos se vengan abajo, y que padezcan alteraciones susceptibles de perjudicar á su solidez, es claro que no las desempeñaremos devidamente, mientras no se averiguen primero todos los movimientos que pueden adquirir las diferentes partes en que se divide una boveda, para hallar despues con arreglo á este conocimiento las condiciones correspondientes á evitar cada uno de aquellos movimientos en particular: y solo siguiendo el camino trazado por este raciocinio, conseguiremos que nuestras aplicaciones sean utiles á la practica, y esten exentas de los errores cometidos hasta aqui. (pp. 3–4)

Ahora bien, una dovela implicada en un mecanismo de colapso puede sufrir un movimiento de rotación o de traslación. Además, como un arco «puede venirse abajo abriendose por uno, dos, tres o mas trozos, y ademas cada uno de estos adquirir el movimiento de rotacion ó el de traslacion, esto es, moverse apoyado en uno de los extremos de su junta de rotura, ó resvalando á lo largo de ella», es evidente que

> segun sean diferentes las circunstancias que acompañen á estos movimientos, asi deverán variar de forma las condiciones que los evitan: de suerte que por lo visto, el exacto conocimiento de todas estas circunstancias ha de depender necesariamente del numero de permutaciones que admiten dos letras que representen, la una el movimiento de traslacion, y la otra el de rotacion. (p. 4)

Al denominar con *t* y *r* el movimiento de traslación y rotación, respectivamente, Monasterio representa los modos de colapso de un arco no simétrico mediante permutaciones de las letras *t* y *r* de acuerdo con la siguiente regla: para cada permutación, el número de letras da el número de dovelas que intervienen en el mecanismo y el orden de las letras (de izquierda a derecha) da el tipo de movimiento que adoptan las dovelas.

Desde un punto de vista estrictamente combinatorio, estas permutaciones son infinitas y Monasterio escribe inicialmente la lista *t*, *r*, *tt*, *tr*, *rt*, *rr*, *ttr*, *trt*, *rtt*, *trr*, *rtr*, *rrt*, *rrr*, *ttt*, *tttr*, *ttrt*, *trtt*, *rttt*, etc. Sin embargo, enseguida afirma sin vacilar que algunos de ellos

> no pueden tener cabida en el asunto que nos ocupa, por que atendida la figura de cuña de las dovelas, su impenetrabilidad y la convexidad del intrados mirado desde arriba para abajo, ni un trozo puede adquirir aisladamente el movimiento de traslacion, ni menos dos solos el movimiento de rotacion. (p.5)

Así, según Monasterio las tres permutaciones *t*, *r* y *rr* son cinemáticamente no admisibles y deben ser excluidas. Sobre este punto, véase el Apéndice 3.

Además, añade que las permutaciones con más de tres letras pueden descomponerse, sin cambiar el orden, en grupos formados por las once permutaciones siguientes *tt*, *tr*, *rt*, *ttr*, *trt*, *rtt*, *trr*, *rtr*, *rrt*, *rrr*, *ttt*. Por ejemplo, dice que la permutación *trrtr* no es relevante, ya que está formada por las permutaciones *trr* y *tr*, que ya representan dos modos de colapso.

Por último, concluye que estas once permutaciones pueden reducirse a siete observando que en las cuatro permutaciones *ttr*, *rtt*, *rtr*, *ttt* las dos primeras letras ya representan un posible modo de colapso, de manera que «todos los diferentes movimientos con que un arco puede venirse abajo» pueden venir dados por las siete permutaciones *tt*, *rrr*, *rrt*, *trr*, *tr*, *rt*, *trt*.[1]

La secuencia de estas permutaciones refleja la organización de los capítulos 1–3 del manuscrito. La primera permutación *tt*, correspondiente al hundimiento por traslación de dos dovelas (Lámina 1, Fig. 1), se analiza en el primer capítulo; la segunda permutación *rrr*, correspondiente al hundimiento por rotación de tres

dovelas (lámina 1, fig. 2), se analiza en el segundo capítulo; las cinco últimas permutaciones *rrt*, *trr*, *tr*, *rt*, *trt*, correspondientes a los modos de hundimiento mixtos que implican tanto la traslación como la rotación de dos o tres dovelas (Lámina 1, Figs. 3–7) se investigan en el tercer capítulo.

Es interesante señalar que un programa de investigación similar a gran escala sobre el colapso de arcos simétricos fue llevado a cabo en los mismos años de Monasterio —y ciertamente de forma independiente— por el erudito alemán J.F.E. Schulz (1808) aplicando el Principio del trabajo virtual. Para hacernos una idea de ello, basta con observar la Lámina XXVI del tratado de Schulz (Fig.3), donde se representan 36 figuras de mecanismos posibles (Monasterio sólo dibuja 8 modos de colapso simétricos). Sin embargo, si observamos atentamente estos mecanismos es fácil concluir que el número de modos realmente diferentes puede reducirse a diez; entre estos últimos, dos de ellos admiten un movimiento compuesto tanto de traslación como de rotación en las juntas inferiores, caso no incluido en la lista de Monasterio de modos de colapso no simétricos y simétricos, donde sólo se consideran la traslación absoluta o la rotación absoluta respecto a la parte fija del arco.[2]

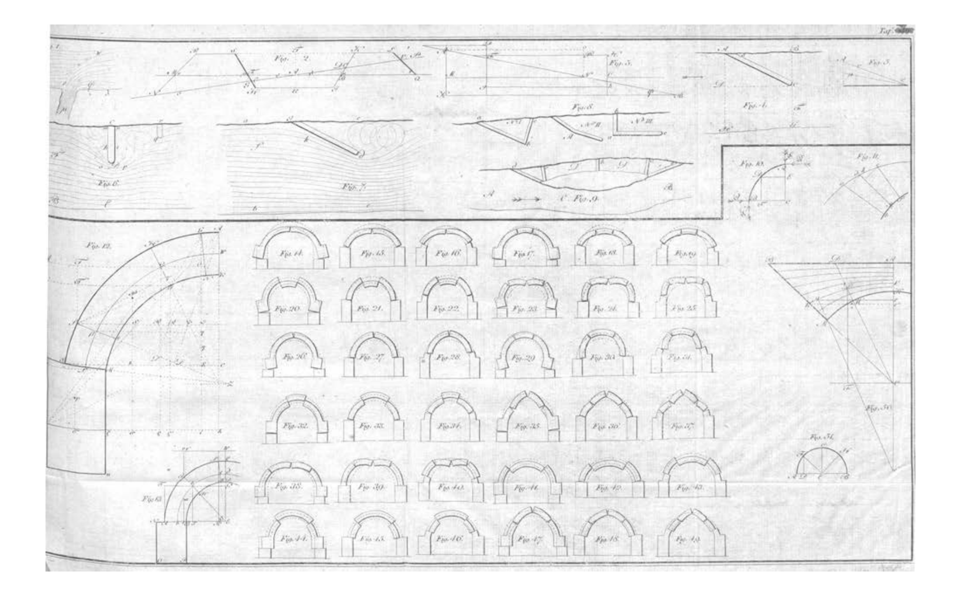


Figura 3. Lámina XXVI de Schulz (1808)

En pocas páginas sería imposible profundizar en las cuestiones tratadas por Monasterio en los densos capítulos del manuscrito. Debemos, pues, limitarnos a presentar los principales rasgos y resultados de su estudio. Es de ayuda en este sentido el proceso uniforme de razonamiento seguido a lo largo de los tres primeros capítulos. Partiendo del análisis del colapso de arcos no simétricos, Monasterio deriva las condiciones generales de estabilidad que deben cumplirse para evitar los siete modos de fallo antes mencionados; a continuación, especializa estas últimas al caso de arcos simétricos y las aplica a bóvedas y cúpulas de geometría simple, de forma que puedan obtenerse resultados cuantitativos. Esta estrategia se desarrolla teniendo en cuenta que,

> pudiendose abrir los arcos por tantas partes diferentes, cuantas son sus juntas de lecho, para estar seguros de que aquellas condiciones se verifican en toda la extension de la boveda, devemos referirnos á aquella posicion de trozos mas poderosa para hacerlos volcar, pues claro està que si el movimiento no se verifica considerados los trozos mas dispuestos a moverse, menos se verificarà con cualesquiera otros. (pp. 8–9)

Esto significa que la búsqueda de la condición de colapso debe realizarse «por medio de la doctrina de maximos y minimos, y no valiendose, como se ha hecho comunmente, de observaciones practicas». (p.9) Esta última consideración se convierte en un criterio racional para juzgar los estudios previos sobre el tema. A este respecto, Monasterio reconoce la primacía de Coulomb, aunque observa que el análisis de Coulomb habría sido correcto

> si . . . no hubiera confundido en una sola las dos fuerzas horizontales dimanadas de considerar un trozo, ya como potencia, ó ya como resistencia: suposiciones que hacen se diferencien entre si aquellas fuerzas, constantemente en los movimientos de rotacion, y en los de traslacion cuando se introduce el rozamiento. (p.9)

La cita anterior revela una sospecha sobre el análisis de Coulomb para los mecanismos de rotación. Sobre este punto volveremos más adelante discutiendo el segundo capítulo dedicado al mecanismo de rotación puro.

Al final de la *Introduccion* Monasterio hace dos advertencias importantes que definen el modelo mecánico del arco. La primera advertencia

> es, que supuesto introducimos en esta teorica el efecto del rozamiento, por la misma razon parece que devia tambien introducirse el de la coherencia del mortero interpuesto entre las juntas de lecho de las dovelas, á lo cual contestaré que prescindimos de la fuerza de coherencia, por ser insensible ó casi nula cuando el mortero se halla blando, esto es, recien construidos los arcos: tiempo, al cual deven referirse nuestras formulas, por ser la epoca en que aquellos corren mas riesgo de arruinarse. Y que contamos con el efecto de la friccion, por que el objeto de dar á las bovedas un estado mas firme y permanente que el del equilibrio, no puede conseguirse, segun veremos mas adelante, si no se admite una fuerza pasiva, cual es el rozamiento, que obrando solo como resistencia sofoque el movimiento que intentan producir las activas que son en nuestro caso los pesos de las dovelas. (p.10)

La segunda advertencia

> se dirige á que en la numeracion hecha de todos los diversos movimientos que pueden ocasionar la ruina de las bovedas, no se hace mencion de aquel que proviene de no tener la materia con que está edificado el arco, la suficiente consistencia para resistir las presiones que se hacen reciprocamente las dovelas; y aunque es verdad que esta objecion no carece á primera vista de fundamento, como por otra parte los experimentos hechos para conocer y medir la dureza de las piedras, dan unos resultados sumamente favorables á la practica, podemos mui bien desenterdernos de calcular si las dovelas, pilares y demas partes del arco tienen la suficiente robustez para aguantar sin desmoronarse á las presiones que sufren, seguros de que la tendran, mientras sus dimensiones, por pequeñas que parezcan con relacion á este objeto, guarden las proporciones que exigen las demas consideraciones que llevamos mencionadas en los articulos anteriores (p.11)

Así pues, según estas advertencias, el modelo mecánico del arco de fábrica es el de un sistema de dovelas (rígidas) con una resistencia a la compresión infinita y sometidas a un contacto unilateral en presencia de rozamiento (de Coulomb).

Este es el modelo considerado por el propio Coulomb, aunque el sabio francés tiene en cuenta inicialmente la cohesión del mortero y sólo más tarde ignora su contribución, «ce qui doit se faire dans les voûtes nouvellement construites» (Coulomb 1776, p.380). Este es el modelo adoptado durante el siglo XIX por muchos autores posteriores a Coulomb que aplicaron —analítica y gráficamente— el método de máximos y mínimos a diversos tipos de bóvedas simétricas bajo condiciones de carga simétricas. En esta línea podemos enumerar los nombres de Audoy (1820), Persy (1825, 1827, 1831, 1834), Navier (1826), Petit (1835), Garidel (1835), Poncelet (1835), Michon (1843, 1857) y, por último, Durand-Claye (1867),[3] cuya *méthode des aires de stabilité* representa el resultado más completo y general de un largo camino de investigaciones teóricas y aplicativas iniciado casi un siglo antes con el *Essai* de Coulomb.

Además, si consideramos que el rozamiento suele ser lo suficientemente grande como para evitar deslizamientos entre las dovelas, el modelo anteriormente esbozado es el mismo que se asume en el análisis límite moderno según las hipótesis de Heyman para el *esqueleto de piedra* (Heyman 1966). A partir de este primer estudio pionero y continuando coherentemente a lo largo de toda su biografía académica y profesional (Heyman 2022), Heyman ha mostrado a la comunidad científica el enfoque más correcto para abordar el análisis estructural de la construcción en fábrica, que es el que podríamos denominar de 'equilibrio' (Huerta 2001), iluminado por el *teorema fundamental de la seguridad* de la teoría plástica. «De la possibilité de l'équilibre, nous concluons à la stabilité» escribía Durand-Claye en 1867, cuando la vieja teoría basada en el modelo rígido del arco estaba a punto de ser definitivamente abandonada en favor de la *méthode nouvelle* del arco elástico, por utilizar la expresión de Résal (Résal 1887, p.99); «if a structure can stand, then it will», repite Heyman haciéndose eco de las palabras de Durand-Claye.

Durante el periodo transcurrido entre estas dos poderosas afirmaciones, el arco de fábrica tuvo que llevar lo que a Heyman le gusta llamar «la camisa de fuerza de Navier» (Heyman 1999), es decir, obedecer al enfoque elástico, cuyo propósito es determinar el estado 'real' de una estructura estáticamente indeterminada

teniendo en cuenta el conjunto completo de ecuaciones de equilibrio, del material (constitutivas) y de compatibilidad.

Como es sabido, la búsqueda de la solución 'única' para una estructura estáticamente indeterminada —podríamos decir la 'verdadera' línea de empuje en el caso de un arco de fábrica— requiere información sobre las propiedades 'elásticas' de los materiales (piedra, ladrillo, mortero) y, sobre todo, sobre las condiciones de contorno. Sin embargo, se pregunta Heyman, ¿qué fiabilidad podemos atribuir a esa solución 'única' «if the 'boundary conditions' . . . are unknown, and by their nature unknowable?». (Becchi y Foce 2022, p.XII). Como no existe un estado 'real' calculable, prosigue, la respuesta a esta pregunta está en adoptar el enfoque alternativo de la teoría plástica debidamente trasladada del esqueleto de acero al esqueleto de piedra. Lo que realmente necesita el ingeniero estructural es comprobar el cumplimiento de las leyes del equilibrio. «It is these laws which are the proper tools for the analysis of masonry, and which are basic to structural engineering, no matter what material (steel, aluminium, concrete, timber) is used» (Heyman 2022, p. 52). Bajo este punto de vista, la segunda advertencia de Monasterio enfoca un aspecto fundamental del análisis límite, ya que implica que la estabilidad global, y no la resistencia local, es la cuestión principal de las estructuras de fábrica.

Es en esta línea de pensamiento que debemos leer la *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas* de nuestro «Don Joaquín Monasterio, ingeniero civil, gran talento», en palabras de José Maria de Lanz (ver Saénz en este libro).

ADVERTENCIAS Y NOTACIONES

Advertimos de antemano que el procedimiento recurrente de Monasterio para enunciar las condiciones de estabilidad que impiden los siete mecanismos de colapso para arcos no simétricos se basa en que, dependiendo del tipo de movimientos (absolutos o relativos) que tomen las dovelas, se puede prescribir la dirección y/o el punto de aplicación de las fuerzas resultantes en las juntas de rotura (obviamente, la localización de estas juntas es desconocida y, para cada mecanismo considerado, debe buscarse mediante el método de máximos y mínimos).

Por ejemplo, la traslación hacia el exterior a lo largo de la junta $M''N''$ de las Fig.1, Fig.3, Fig.6 y Fig.7[4] de la Lámina 1, requiere que la dirección de la fuerza resultante en esa junta se encuentre en el límite interno del cono de rozamiento (y, además, vaya dentro del espesor de la propia junta, condición no discutida por Monasterio pero que implícitamente se da por supuesta); la rotación hacia el interior alrededor de un punto intradós, como el punto M_{II} de las Fig.2 y Fig.3 o el punto M_{I} de la Fig.6 de la Lámina 1, requiere que la fuerza resultante pase por ese punto (y, además, que su dirección se encuentre dentro del cono de fricción en esa junta, una condición que Monasterio vuelve a dar por supuesta); el movimiento compuesto hacia el interior de traslación relativa y rotación en la junta $M'N'$ de la Fig.5 de la Lámina 1 requiere que la fuerza resultante pase simultáneamente por el punto intradós y que su dirección se encuentre en el límite exterior del cono de rozamiento.[5]

Además, observamos que, para cada uno de los siete modos de colapso no simétricos, la dovela derecha siempre se desplaza hacia el exterior en la junta de rotura $M''N''$ (por traslación absoluta de M'' a N'' o por rotación absoluta alrededor del punto N'' trasdós) y por esta razón desempeña el papel de *resistencia* contra el movimiento incipiente hacia el exterior. Por el contrario, los otros cuerpos —uno en las permutaciones con dos letras o dos en las permutaciones con tres letras— se desplazan hacia el interior en la junta de rotura $M'N'$ o en las juntas de ruptura $M'N'$ y $M_{II}N_{II}$, y por ello desempeñan el papel de *potencia* a favor del movimiento incipiente hacia el interior.

Por último, anticipamos que las condiciones de estabilidad derivadas para los mecanismos no simétricos —y luego particularizadas para los mecanismos simétricos— se dan en forma de desigualdades que contienen términos positivos (estabilizantes) y términos negativos (desestabilizantes).[6] Monasterio elabora a menudo estas condiciones multiplicándolas o dividiéndolas por factores algebraicos de los que comprueba regularmente el signo positivo, de manera que se mantenga el signo de la desigualdad.

Antes de examinar el contenido de la *Nueva teorica*, puede ser útil recordar aquí las principales notaciones utilizadas a lo largo del texto.

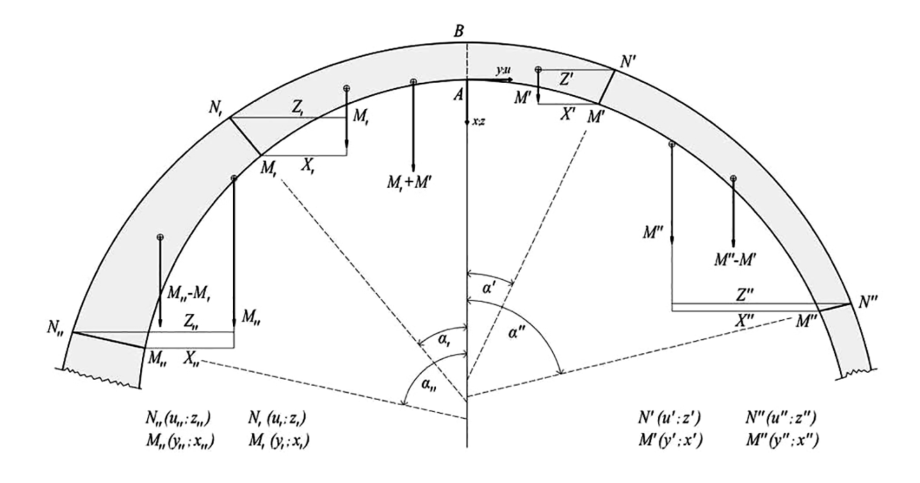


Figura 4. Esquema general de un arco no simétrico y notaciones utilizadas por Monasterio

Coordenadas horizontales y verticales de los puntos del trasdós e intradós

$$N_{II}=(u_{II},z_{II}) \qquad N_{I}=(u_{I},z_{I}) \qquad N'=(u',z') \qquad N''=(u'',z'')$$
$$M_{II}=(y_{II},x_{II}) \qquad M_{I}=(y_{I},x_{I}) \qquad M'=(y',x') \qquad M''=(y'',x'')$$

M_{II}: peso de la dovela $AM_{II}N_{II}B$
M_I: peso de la dovela AM_IN_IB
M': peso de la dovela $AM'N'B$
M'': peso de la dovela $AM''N''B$

α_{II} : ángulo entre el eje vertical y la junta $M_{II}N_{II}$
α_I : ángulo entre el eje vertical y la junta M_IN_I
α' : ángulo entre el eje vertical y la junta $M'N'$
α'' : ángulo entre el eje vertical y la junta $M''N''$

X_{II}; Z_{II} : brazo de palanca del peso M_{II} respecto a los puntos M_{II} and N_{II}
X_{II}; Z_I: brazo de palanca del peso M_I respecto a los puntos M_I and N_I
X'; Z': brazo de palanca del peso M' respecto a los puntos M' and N'
X''; Z'': brazo de palanca del peso M'' respecto a los puntos M'' and N''

$K = AB$: espesor del arco en la junta vertical de la clave
f : ángulo de rozamiento

CAPITULO PRIMERO

Además de las dos advertencias anteriormente citadas, Monasterio añade al principio del primer capítulo cuatro importantes observaciones que completan el modelo mecánico adoptado:

> 1. Con el fin de dar á estas investigaciones toda la extension posible, prescindimos que las bovedas sean de cañon seguido ó de media naranja, y que las juntas de lecho tengan una direccion determinada; pero supondremos infinito el numero de estas juntas en todos los arcos, para que asi esten sujetas á la ley de continuidad las formulas que deduzcamos, y la boveda se considere con mas partes aptas por donde pueda abrirse, que juntas tiene en su estado verdadero: lo que es una circunstancia que se dirige á favorecer mas la solidez. (p.12)

Esta elección es perfectamente razonable, ya que evita cualquier suposición arbitraria sobre la posición de las juntas de ruptura y permite aplicar el cálculo diferencial para determinar los máximos y los mínimos.

> 2. Para concebir en las medias naranjas los siete movimientos expresados en la introduccion con la misma facilidad que en las bovedas de cañon seguido, supondremos aquellas cortadas por una infinidad de planos que pasando por el exe de rebolucion formen entre si angulos infinitamente pequeños; y de esta suerte, considerando cada sección de las que resultan como una boveda aislada en donde pueden ya mui bien verificarse dichos movimientos, reduiremos el examen de las medias naranjas al de una seccion suya acompañada de las circunstancias referidas. (p.12)

Las grietas a lo largo de los meridianos son típicas en las cúpulas esféricas y justifican la elección hecha por Monasterio y adoptada por otros autores antes que él, por ejemplo, los 'tre Mattematici' (1743) y Poleni (1748) para la cúpula de San Pedro en Roma.

> 3. Las fuerzas que introducimos en estos calculos son constantemente pesos de trozos de boveda; y los pesos midiendose por el producto de los tres factores, gravedad, densidad y volumen de los cuerpos à quienes pertencen, pueden ser remplazados por dicho producto, con lo cual las formulas en que se haya hecho esta substitucion, aparecerán, en el supuesto de ser homogenea la boveda, divisibles por los dos primeros factores, y quedarán despues de efectuada la division, de la misma forma que si por los pesos se hubieran substituido desde luego los volumenes. Asi, por el peso ó fuerza de un trozo entenderemos generalmente su volumen, siempre que no se advierta si la boveda es de cañon seguido ó de media naranja; pero si se supone lo primero, entonces por el peso de un trozo entenderemos solo la superficie ó cara que presenta en el alzado: por que en este caso de los dos factores, el ancho de la boveda y dicha superficie, cuyo producto mide el volumen del trozo en cuestion, el primero es comun á todos los trozos de la boveda. (pp. 12–13)

Una última observación se refiere a ciertas características geométricas que el arco debe respetar para no colapsar por su propio peso:

> 4. Dijimos en la Introduccion, por las razones allí expuestas, que eran imposibles los movimientos deducidos de las tres permutaciones *t*, *r*, *rr*; pero si ahora non desentendemos de toda consideracion particular para hallar analiticamente hasta la mas claras y evidentes propiedades que deven gozar los arcos, encontraremos ser necesario, á fin de que los movimientos de las tres permutaciones dichas no tengan lugar:
>
> 1°. Que las juntas de lecho $M_{II} N_{II}$, $M_I N_I$ etc (Fig.18) sean convergentes desde la parte del extrados hacia la del intrados, formando ademas con la vertical angulos $M_{II} R_{II} A$, $M_I R_I A$ etc. menores que el recto. 2° que la vertical que pasa por el centro de gravedad de un trozo $M''N''NM'$ cualquiera, cayga entre los puntos M'' y N'' de su junta, ó entre el punto M'' y el claro del intrados; pero de ninguna manera mas allá del punto N'' hacia la parte de afuera del extrados. 3° que sea siempre menor que dos rectos el angulo $M_{II} N_I M'$ formado en un punto cualquiera del extrados por dos rectas tiradas desde este punto á otros dos M_{II} y M' del intrados. 4° y ultimo, que toda línea $M' N_I r$ tirada desde un punto del intrados forme un angulo $M'rR_{II}$ menor que el recto con la junta M_{II} N_{II} que encuentra siguiendo aquella direccion, ó con su prolongación $M_{II} r$ [7]. Y puesto

> que las bovedas en quienes no se verifican estas cuatro condiciones, han de venir necesariamente abajo por su proprio peso, como es facil inferir á la simple vista, solo consideraremos aqui las que satisfagan en toda su extension á las condiciones referidas. (pp. 13–14)

Arcos no simétricos y permutación tt

Como se ha dicho antes, el primer capítulo trata del colapso del arco por traslación pura. Monasterio estudia inicialmente un arco no simétrico y analiza el mecanismo de la Fig.1, que representa la permutación *tt*. Descompone el peso $(M_{\prime}+M')$ de la dovela izquierda (que juega el papel de *potencia*) en dos fuerzas $F_{\prime}$ y F' y observa que cuando el arco sufre el movimiento de la Fig.1 deben cumplirse los dos requisitos siguientes:

1) las direcciones de las fuerzas $F_{\prime}$ y F' deben situarse en el límite externo del cono de rozamiento en las juntas $M_{\prime}N_{\prime}$ y $M'N'$, respectivamente;
2) la dirección de la fuerza resultante obtenida al componer la fuerza F' y el peso $(M''-M')$ de la dovela derecha (que desempeña el papel de *resistencia*) debe situarse en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M''N''$.

Así, la estrategia operativa de Monasterio consiste en escribir la fuerza F' en función del peso $(M_{\prime}+M')$ y de los ángulos $\lambda_{\prime}$ y λ' (tomados iguales a los complementarios del ángulo de rozamiento f en las juntas $M_{\prime}N_{\prime}$ y $M'N'$, respectivamente) e imponer a continuación el equilibrio traslacional en la junta $M''N''$ entre la componente tangencial de F' que promueve el deslizamiento hacia el exterior y la resistencia tangencial debida a la componente del peso $(M''-M')$ paralela a la junta $M''N''$ y la reacción de rozamiento medida por la componente normal de F' y $(M''-M')$ multiplicada por el coeficiente de rozamiento.

Conservando la numeración original del manuscrito, la condición de estabilidad viene dada entonces por la siguiente desigualdad

(A) $$a'M''-b'M'-c'M_{\prime}\geq 0$$

donde los coeficientes a', b' y c' satisfacen ciertas relaciones entre los ángulos α_l, α', α'' y f.

Monasterio manipula esta desigualdad para simplificar su discusión matemática y obtiene, tras algunos pasos, la nueva forma

$$\text{(7)}\qquad \frac{\sin(\alpha'+f)}{\sin(\alpha''-f+\alpha'-f)}\{M''\cot(\alpha''-f)-M'\cot(\alpha'+f)\}+ \\ +\frac{\sin(\alpha_l+f)}{\sin(\alpha''+\alpha_l)}\{M''\cot(\alpha''-f)-M_l\cot(\alpha_l+f)\}\geq 0$$

Luego observa que en (7) el primer término depende de α' y α'' y el segundo de α_l y α''. Ahora bien, si uno se fija razonablemente α'' en el arranque derecho «por que comunmente son estos los parajes mas expuestos del arco», los dos términos solo dependen de α' y α_l, respectivamente. En este caso «sus respectivos mínimos podran expeditamente hallarse, ó por la diferenciacion, ó por tanteos dando á α' y α_l diferentes valores: si la suma de estos minimos es positiva . . . concluiremos de este calculo que el movimiento puro de traslacion no tiene de modo alguno lugar en la boveda». (p.21)

Condición de estabilidad en ausencia de rozamiento

La desigualdad (7) es el punto de partida de varios desarrollos. El primero se refiere al caso de juntas sin rozamiento, para el que Monasterio encuentra la ecuación de equilibrio

$$\text{(10)}\qquad M = A\tan\alpha$$

donde A es una constante que representa la componente horizontal de la fuerza resultante en cada junta y M es el peso de una dovela genérica subtendida por un ángulo α desde la vertical en la clave.

Monasterio escribe que esta ecuación «se halla vajo diferentes formas en casi todas las obras que tratan del empuje de bovedas, y parece que el objeto principal

de sus Autores no ha sido otro que darla á conocer como si en ella solo estribara todo el fundamento de la teorica, siendo asi que es la mas inutil». (p.25)

Tres razones motivan la crítica de Monasterio. En primer lugar, aunque al cumplirse la condición (10) se impide cualquier movimiento por traslación pura, «no por eso se logra que las bovedas dexen de adquirir otros de distinta especie, como sucede á la boveda adintelada que es una de las mas expuestas á venirse abajo tomando el movimiento mixto de primera especie» (p.25); en segundo lugar, la condición (10) no puede cumplirse si las juntas de los arranques son horizontales, ya que en este caso «la superficie de la boveda debia ser infinita siendolo la tangente del angulo recto» (pp. 25–26); en tercer lugar, el requisito de satisfacer la condición (10) aumentando la dimensión de las dovelas según tanα «quita la facultad que hay de poder disponer aun mismo tiempo de las dos curbas intrados y extrados». (p.26)

Arcos de espesor infinitesimal uniforme

A pesar de los comentarios anteriores, Monasterio proporciona una aplicación de la condición (10) «tan solo por que nos dará á conocer anticipadamente dos curbas de propiedades muy apreciables por lo que diremos en el Capitulo segundo» (p.26). Esta aplicación se refiere al caso de una bóveda y una cúpula de espesor infinitesimal constante, para las que Monasterio encuentra fácilmente las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes. Como él mismo escribe:

> Es facil conocer, aplicando los principios de la maquina funicular, que la primera de las dos ultimas equaciones corresponde á la curba que resulta de suspender por sus extremos á una cuerda uniforme é infinitamente delgada y flexivle, y que la segunda equacion se refiere á la curba que debe tomar un lienzo tambien infinitamente delgado y flexible, pero de una anchura tal, que desde los extremos vaya disminuyendo hasta el medio, y su proyeccion horizontal esté representada por dos rectas que formando un angulo infinitamente pequeño, se crucen en el punto que corresponde verticalmente al vertice ó punto mas bajo del lienzo. (p.27)

Por eso denomina a estas curvas «catenaria plana o de cañon seguido» en el primer caso y «catenaria de revolucion o de media naranja» en el segundo.

Arcos simétricos

Otra aplicación relevante de la condición de estabilidad (A), o su derivada (7), la da Monasterio para tratar el caso de un arco simétrico. Estableciendo en la condición (A) $M_I = M'$ y $\alpha_I = \alpha'$ cuando $M'' > M'$, ó $M' = -M''$ y $\alpha' = -\alpha''$ cuando $M'' < M'$, encuentra las correspondientes dos condiciones de estabilidad que impiden los mecanismos opuestos de las Fig.10 y Fig.11. Independientemente de la posición relativa de los ángulos α' y α'', estas dos condiciones pueden reducirse a la siguiente

(B) $$M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0$$

«donde se vé que la boveda satisfará en todas sus juntas á esta condicion, si el minimo de $M'' \cot(\alpha'' - f)$ es mayor que el maximo de $M' \cot(\alpha' + f)$». (p.28)

Esta conclusión concuerda perfectamente con la condición de estabilidad que podría deducirse aplicando el método de máximos y mínimos de Coulomb. De hecho, los dos términos de (B) no son más que los valores del empuje horizontal que satisfacen el equilibrio con respecto a la traslación hacia fuera a lo largo de la junta α'' y a la traslación hacia dentro a lo largo de la junta α', respectivamente.

Aplicaciones a los arcos simétricos

Como bien afirma Monasterio generalizando el tratamiento de Coulomb, la desigualdad (B) puede ser útil para estudiar los dos modos de colapso opuestos de las Figs. 10 y 11, dependiendo de la posición relativa de las juntas de ruptura.

Una primera aplicación de la desigualdad (B) la da Monasterio para determinar el coeficiente de rozamiento mínimo que impide el colapso de la Fig.10 para un arco de medio punto de espesor constante. Obtiene que la condición (B) se satisface como una igualdad si tan f = 0,31 «aproximada por exceso». Este valor, correspondiente a un ángulo de rozamiento f = 17º36', es cuantitativamente correcto ya que sabemos (Sinopoli et al., 1997) que el colapso de la Fig. 10 puede producirse cuando tan f = 0,309, con juntas de rotura en α'= 29º y α''= 90º. Hay que decir, sin embargo, que la conclusión de Monasterio sólo es válida si la

relación entre los radios de trasdós e intradós es mayor que 1,225, ya que en caso contrario se produce el mecanismo mixto con deslizamiento hacia el exterior en los arranques y formación de articulaciones en el trasdós de la junta de clave y en el intradós de los riñones.

Una segunda aplicación de la desigualdad (B) se refiere a una interesante interpretación de los movimientos registrados tras el descimbramiento en el puente de St. Edme en Nogent, construido por Perronet en 1768. Como premisa de esta aplicación, Monasterio señala que

> devemos caminar con mucho cuidado cuando por ciertas circunstancias particulares se sepa ó presuma que el rozamiento no ha de producir su efecto, como sucede en un corto intervalo de tiempo que empieza á contarse desde el instante que los arcos recien acabados de construir se ven enteramente libres de la cimbra, sin haber dado lugar á que la mezcla interpuesta entre las juntas de las dovelas tome la devida consistencia. (p.30)

De forma inteligente, observa que durante la fase de asentamiento, la componente normal de la fuerza en cada junta «se empleará solamente á los principios en aproximar los lechos unos con otros, haciendo desalojar el mortero que los separa, resultando de aqui una contraccion en la longitud del arco, tanto mas sensible cuanto mayor fuere el numero de lechos» (p.31). Al mismo tiempo, la componente tangencial en cada junta «conseguirá hacer resvalar á las dovelas en direccion de sus juntas hacia el centro del arco ó en sentido contrario, segun el signo que acompañe á esta fuerza» (p.31). Estos movimientos sólo se detienen cuando se produce el contacto de la dovela: a partir de este momento, la componente normal «comienza (...) á exercer solamente el oficio de presion, y por lo tanto el rozamiento á producir su efecto sofocando el movimiento» (p.31).

Según Monasterio, éste fue el caso del puente de St. Edme, cuya cimbra fue retirada por Perronet sólo tres días después de terminar el arco, cuando el mortero no estaba suficientemente seco. La Lámina II de Perronet (Fig.5) muestra el efecto visible del descimbramiento sobre la curvatura original del intradós. A este respecto, Perronet escribe:

> Para hacer más perceptible este cambio de curvatura, y para distinguir la parte de la bóveda que tiende a volcar los estribos y las pilas de las partes inferiores que resisten este esfuerzo, hice trazar una línea horizontal en las dovelas de las cabezas de los arcos antes del descimbrado, desde la parte superior de la hilada vigesimoctava hasta la otra, y otras líneas oblicuas en línea con los riñones, desde los extremos de esta línea horizontal hasta el punto en que la hilada séptima se une al muro abocinado de cada estribo.[8] (Perronet 1777, p.43)

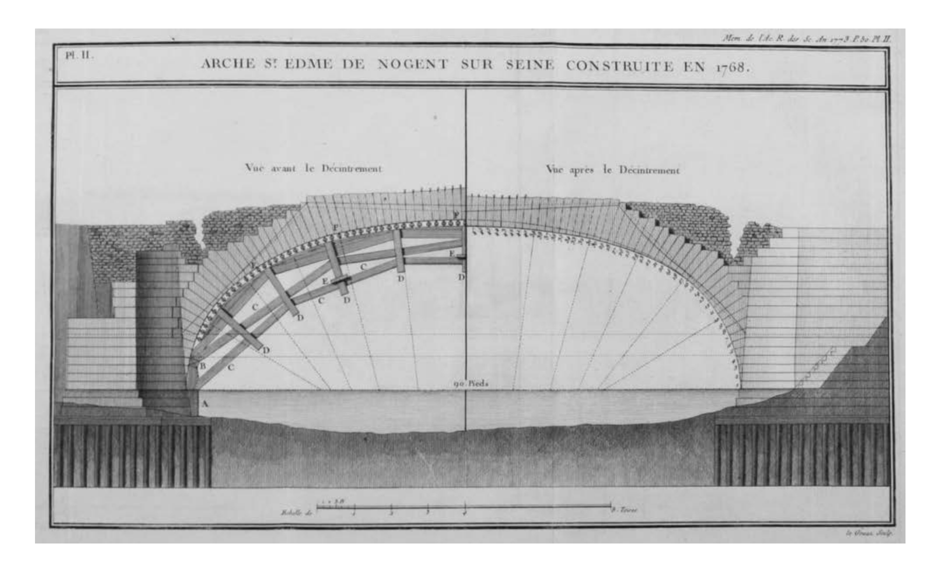


Figura 5. Lámina II de Perronet (1777)

Según Monasterio, que reproduce la Lámina II de Perronet de forma ligeramente modificada en su Lámina 2, figs. 8–9, y marca con *f* el punto de inflexión formado en las líneas diagonales, la curvatura adquirida por las líneas originalmente rectas

> nos prueva claramente que las dobelas superiores al punto *f* se vieron obligadas á vajar resvalando por sus respectivas juntas de lecho, y las inferiores á subir con igual movimento, apareciendo unicamente inmovil la dobela que coincide con el punto *f*. (p.32)

Monasterio recurre a su habilidad matemática y utilizando la condición (10) calcula analíticamente las coordenadas del punto *f*, encontrándolas en perfecto acuerdo con la evidencia experimental. Sin embargo, si se observa la lámina original de Perronet y se compara la curva del intradós antes y después del descimbramiento, parece igualmente razonable interpretar el movimiento de los segmentos de arco por encima y por debajo del punto de inflexión *f* como consecuencia de una rotación. A este respecto el propio Perronet da una pista cuando escribe que «este punto de inflexión, en el que debe producirse la separación de dos acciones que actúan en direcciones opuestas, era además sensible por la junta que se había abierto en este punto».[9] (Perronet 1777, p.44).

CAPITULO SEGUNDO

Arcos no simétricos y permutación rrr

Como se ha dicho, el capítulo segundo trata del colapso por rotación pura. Monasterio considera un arco no simétrico y analiza el movimiento de la Fig.2, correspondiente a la permutación *rrr*. Como antes, descompone el peso $(M_I + M')$ de la dovela central en dos fuerzas F_I y F' y observa que cuando el arco desarrolla el mecanismo de la Fig.2 deben cumplirse los cuatro requisitos siguientes:

1) la fuerza F' debe pasar por el borde del intradós M';

2) la fuerza F_I debe pasar por el borde del trasdós N_I;

3) el momento de F_I con respecto al borde del intradós M_{II} debe ser igual al momento del peso $(M_{II} - M_I)$ con respecto al mismo punto;

4) el momento de F' con respecto al borde del trasdós N'' debe ser igual al momento del peso $(M'' - M')$ con respecto al mismo punto.

Tratando analíticamente estos requisitos Monasterio encuentra la condición de estabilidad que impide el movimiento de la Fig.2:

(C) $$a''M''Z'' - b''M'X' + c''M_IZ_I - d''M_{II}X_{II} \geq 0$$

donde los coeficientes a'', b'', c'' y d'' satisfacen algunas relaciones entre las coordenadas de los centros de rotación absoluta y relativa de las tres dovelas implicadas en el movimiento.

Arcos con espesor infinitesimal uniforme

A continuación, particulariza la condición de estabilidad (C) cuando el arco se convierte en una curva con espesor infinitesimal, para lo cual demuestra que «en todos los puntos de la curba» la desigualdad (C) debe convertirse en una igualdad

$$\frac{MX}{x} = \text{constante}$$

donde M es el peso de la parte genérica de la curva con brazo de palanca X respecto al punto genérico con distancia vertical x desde el origen. Introduciendo las expresiones de MX para la bóveda y la cúpula y tras hacer el desarrollo matemático del problema Monasterio encuentra

> dos ecuaciones iguales a las que dimos a conocer en el n.18: lo que nos prueba que las catenarias plana y de revolucion son las unicas curvas que deven formar las bovedas de cañon seguido e media naranja para que no se vengan abajo en el caso de ser su expesor infinitamente pequeño. Esta propiedad es la que hace verdaderamente recomendables á la practica las dos curbas acabadas de mencionar, y no el supuesto admitido en el n.18 del Capitulo Segundo, porque nunca se verifica (pp. 40–41)

Arcos simétricos

Otra aplicación de la condición de estabilidad (C) se refiere al caso de los arcos simétricos. Estableciendo en la condición (C) $M_{II} = M'$ y $\alpha_{II} = \alpha'$ cuando $M'' > M' > M_I$, ó $M'' = M_I$ y $\alpha'' = \alpha_I$ cuando $M_{II} > M_I > M'$, Monasterio encuentra las condiciones de estabilidad que impiden los dos mecanismos simétricos opuestos de las figuras Fig.12 y Fig.13, es decir

(D) $$M''Z''(x' - z_I) - M'X'(z'' - z_I) + M_I Z_I (z'' - x') \geq 0$$

(E) $$-M_{II}X_{II}(z_I - x') + M_I Z_I (x_{II} - x') - M'X'(x_{II} - z_I) \geq 0$$

En concreto, particulariza las condiciones anteriores suponiendo que en la clave se abre una junta de rotura en lugar de las dos articulaciones simétricas próximas a ella. Así, haciendo $M_I = 0$ en (D) y $M' = 0$ en (E), obtiene las condiciones de estabilidad que impiden los mecanismos de rotación habituales opuestos con articulaciones bien en el trasdós o en el intradós de la junta de la clave, es decir

(F) $$\frac{M''Z''}{z''+K} - \frac{M'X'}{x'+K} \geq 0$$

(G) $$\frac{M_I Z_I}{z_I} - \frac{M_{II}X_{II}}{x_{II}} \geq 0$$

Estas dos desigualdades son equivalentes a las condiciones de estabilidad que podrían derivarse mediante una aplicación 'adecuada' del método de los máximos y los mínimos de Coulomb, ya que los dos términos de (F) representan los valores del empuje horizontal que satisfacen el equilibrio rotacional alrededor del borde del trasdós en la junta α'' y del borde del intradós en la junta α' cuando el empuje se aplica en el trasdós de la clave y $\alpha'' > \alpha'$, y los dos términos de (G) representan los valores del empuje horizontal que satisfacen el equilibrio rotacional alrededor del borde del intradós en la junta α_I y en el borde del trasdós en la junta α_{II} cuando el empuje se aplica en el intradós de la clave y $\alpha_{II} > \alpha_I$.

Subrayamos la aplicación 'adecuada', ya que el análisis de Coulomb de los mecanismos de colapso por rotación no es completo y una corrección explícita de sus conclusiones no fue dada hasta 1825 por Persy (Foce 2002). Así pues, desde un punto de vista histórico, debemos reconocer ahora que el análisis de Monasterio se anticipa a la contribución de Persy a la correcta aplicación del método de máximos y mínimos con respecto a los dos mecanismos opuestos por rotación.

Aplicaciones a arcos simétricos y cúpulas

Además del análisis teórico anterior, Monasterio aplica la desigualdad (F) para determinar el espesor mínimo de un arco de medio punto con radio intradós *r*, caso ya estudiado en 1730 por Couplet (1732) bajo el supuesto arbitrario de las juntas de rotura a 45° de la clave. Couplet había encontrado para el espesor mínimo el valor $K = 0{,}1061r$. Monasterio descubre por tanteo que el espesor mínimo se sitúa entre $\frac{1}{8}r = 0{,}125r$ y $\frac{1}{9}r = 0{,}111r$, y que la junta de rotura en los riñones está entre 54° y 56° de la clave. El resultado de Monasterio es cuantitativamente correcto y concuerda con el valor 0,114*r* obtenido por Petit (1835). Una aproximación más satisfactoria fue dada en 1907 por Milutin Milankovitch (1907) quien, basándose en su notable estudio sobre la teoría de las líneas de empujes, determinó el valor 0,1136*r* y la correspondiente junta de rotura a 54°29' de la clave. Sobre la teoría de Milankovitch véase Foce (2007). Otros estudios importantes sobre el arco de espesor mínimo han sido discutidos recientemente en Huerta (2019).

Sobre el uso de la otra desigualdad Monasterio observa que «serà excusado pasar á discutir la condicion (G) referida al mismo exemplo, pues deve necesariamente de verificarse con cualquier valor que se de á *K*.» (p.46) De esta observación Monasterio deriva la conclusión de que

> aun que sean dos las condiciones sacadas para evitar en las bovedas simetricas el movimiento puro de rotacion, nunca habrà necesidad de discutir sino solamente una de ellas. La unica dificultad que puede presenterse es el saber cual de las dos deve convenir á la cuestion, pero cuando este conocimiento no nos le proporcione la simple ispeccion de la figura que se quiere dar á la boveda, tomaremos arbitrariamente cualquiera de las dos condiciones, y su consideracion nos mostrará prontamente si la eleccion esta mal ó bien hecha. (p.47)

El desarrollo anterior abre el camino a la búsqueda del espesor mínimo que impida el colapso de una cúpula semiesférica, para lo cual debe discutirse la desigualdad (G), en lugar de (F), ya que «en esta especie de bovedas los trozos inferiores se hallan á igualdad de arcos, mas robustos ó cargados que los superiores». La aplicación de la desigualdad (G) proporciona el valor $K = 0{,}0421r = r/23{,}7$ del espesor mínimo que asegura la estabilidad de la cúpula, es decir, un valor

comprendido entre 1/23 = 0,043 y 1/24 = 0,041 del radio intradós. Sobre esta base Monasterio critica con razón a Rondelet y la «formula suya», según la cual las cúpulas semiesféricas «no tienen empuje alguno» y por tanto serían estables incluso con $K = 0$, simplemente un «disparate», *nonsense*, en palabras de Heyman (Heyman 1985). Sobre la singularidad de la teoría de Rondelet véase también (Foce 1996). Aquí Monasterio insiste en subrayar que el «salir cierta la condicion (F) con cualquier valor de K nos advierte solamente que el movimiento de la Fig.12 es imposible en las medias naranjas, pero no el representado por la Fig.13, que debe verificarse realmente siendo K menor que $r/23{,}7$» (p.48).

CAPITULO TERCERO

Arcos no simétricos y permutaciones rrt y trr

Como se ha dicho anteriormente, el capítulo tercero trata del colapso por movimientos mixtos de traslación y rotación correspondientes a las cinco permutaciones *rrt*, *trr*, *tr*, *rt*, *trt* de las Figs. 3–7. Considerando un arco no simétrico, Monasterio aborda en primer lugar las dos permutaciones *rrt* y *trr*, que tienen en común el movimiento de la dovela central. Como es habitual, descompone el peso $(M_I + M')$ de esta dovela en dos fuerzas F_I y F' y observa que cuando el arco desarrolla los mecanismos de las Fig.3 y Fig.4 deben cumplirse los siguientes requisitos:

1) la fuerza F_I debe pasar por el punto trasdós N_I;
2) la fuerza F' debe pasar por el punto intradós M';
3) además, para el mecanismo de la Fig.3 el momento de F_I con respecto al punto M_{II} del intradós debe ser igual al momento del peso $(M_{II} - M_I)$ con respecto al mismo punto, mientras que para el mecanismo de la Fig. 4 la fuerza resultante obtenida al componer la fuerza F_I con el peso $(M_{II} - M_I)$ debe estar en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M_{II}N_{II}$;
4) finalmente, para el mecanismo de la Fig.3 la fuerza resultante obtenida al componer la fuerza F' con el peso $(M'' - M')$ debe situarse en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M''N''$, mientras que para el mecanismo de la

Fig.4 el momento de F' con respecto al punto del trasdós N'' debe ser igual al momento del peso $(M''-M')$ con respecto al mismo punto.

Así, las condiciones de estabilidad que impiden el «movimiento mixto de primera especie» y el «movimiento mixto de segunda especie» resultan, respectivamente

(H) $$a'''M''-b'''M'X'+c'''M_{I}Z_{I}-d'''M_{II}X_{II}\geq 0$$

(I) $$a^{IV}M''Z''-b^{IV}M'X'+c^{IV}M_{I}Z_{I}-d^{IV}M_{II}\geq 0$$

donde los ocho coeficientes a''', b''', etc. satisfacen ciertas relaciones entre el ángulo de rozamiento y las coordenadas de los centros de rotación absoluta y relativa de las tres dovelas que intervienen en el mecanismo.

Arcos simétricos

Para arcos simétricos las dos condiciones anteriores deben particularizarse fijando $M_{II}=M'$ y $\alpha_{II}=\alpha'$ en (H), y $M''=M_{I}$ y $\alpha''=\alpha_{I}$ en (I), bajo los requisitos (no dados explícitamente por Monasterio) de que $M''>M'>M_{I}$ en el primer caso, y $M_{II}>M_{I}>M'$ en el segundo. Así, las dos condiciones de estabilidad que impiden los mecanismos de colapso de las Fig. 14 y Fig.15 pasan a ser

(K) $$M''(x'-z_{I})\cot(\alpha''-f)-(M'X'-M_{I}Z_{I})\geq 0$$

(L) $$M_{I}Z_{I}-M'X'-M_{II}(z_{I}-x')\cot(\alpha_{II}+f)\geq 0$$

Estas últimas pueden simplificarse aún más si se abre una única junta de rotura en la clave en lugar de dos simétricamente a ambos lados. En este caso adoptan la forma

(M) $$M''\cot(\alpha''-f)-\frac{M'X'}{K+x'}\geq 0$$

(N) $$\frac{M_{I}Z_{I}}{z_{I}}-M_{II}\cot(\alpha_{II}+f)\geq 0$$

Como en los casos anteriores de arcos simétricos, estas desigualdades pueden interpretarse fácilmente en términos del método de máximos y mínimos de

Coulomb. El término positivo y el término negativo en (M) no son otra cosa que los valores del empuje horizontal que satisfacen el equilibrio con respecto a la traslación hacia el exterior a lo largo de la junta α'' y la rotación hacia el interior alrededor del borde del intradós de la junta α', con $\alpha'' > \alpha'$. Si el mínimo del término positivo es mayor que el máximo del negativo, es decir si su diferencia es mayor que cero, entonces el colapso de la Fig.14 (con articulación en el trasdós de la clave) es imposible.

Del mismo modo, el término positivo y el término negativo en (N) no son otra cosa que los valores del empuje horizontal que satisfacen el equilibrio con respecto a la rotación hacia el exterior alrededor del borde del trasdós de la junta α_I y la traslación hacia el interior a lo largo de la junta α_{II}, con $\alpha_{II} > \alpha_I$. Si el mínimo del término positivo es mayor que el máximo del negativo, es decir, si su diferencia es mayor que cero, entonces el colapso de la Fig.15 (con articulación en el intradós de la clave) es imposible.

Aplicaciones a los arcos simétricos

Una primera aplicación de la condición (M) se refiere de nuevo al arco de medio punto de espesor constante, para el que Monasterio ya había encontrado el coeficiente de rozamiento mínimo tan *f* = 0,31 que impide el modo de colapso por traslación pura de la Fig.10 y el espesor mínimo $K = \frac{1}{8}r$ que impide el modo de colapso por rotación pura de la Fig. 12 (con articulación en el trasdós de la junta de clave). Asumiendo estos dos valores encuentra que la condición de estabilidad (M) no se satisface y entonces el mecanismo de la Fig. 14 (con articulación en el trasdós de la clave) puede realmente ocurrir. En consecuencia, señala que

> es necessario para evitar en esta clase de bovedas el movimento mixto de primera especie, ó dar á las dovelas un espesor mayor que aquel con que se logra impedir el movimiento de rotacion, ó bien suponer el rozamiento mayor que el puramente necessario para sofocar el movimiento de traslacion (pp. 53–54).

Para cumplir la condición de estabilidad (M) Monasterio sugiere aumentar el coeficiente de rozamiento. Toma tan *f* = 0,5, «que es el supuesto mas común-

mente acreditado por la experiencia» y encuentra que con este valor del coeficiente de rozamiento «estan ya las bovedas en cuestion libres de tomar el movimiento mixto de primera especie, sin necesisad de aumentar el espesor $K = \frac{1}{8} r$». (p.54)

Esta conclusión es cuantitativamente correcta. Sin embargo, hay que subrayar que el modo mixto de la Fig.14 (con articulación en el trasdós de la clave) puede impedirse para infinitos valores acoplados del espesor y del coeficiente de rozamiento. Sabemos (Sinopoli et al., 1997) que para un arco semicircular de espesor constante el mecanismo de rotación pura con articulación en el trasdós de la clave se previene cuando $K = 1{,}1136r$ y $\tan f \geq 0{,}395$, mientras que el mecanismo de deslizamiento puro se previene cuando $K = 1{,}225r$ y $\tan f \geq 0{,}309$ Así, dentro de los rangos $1{,}1136r \leq K \leq 1{,}225r$ y $0{,}309 \leq \tan f \leq 0{,}395$, es posible encontrar infinitos pares de valores para el espesor (aumentando a partir de $K = 1{,}1136r$) y para el coeficiente de rozamiento (disminuyendo a partir de $\tan f = 0{,}395$) que corresponden a la activación del modo mixto de primer tipo.[10]

Una segunda aplicación de la condición (M) se refiere al caso de la «boveda adintelada …, una de las mas expuestas á adquirir el movimiento mixto de primera especie». Para este tipo de arco los ángulos α'' y α' que aparecen en la condición

(M) coinciden con el ángulo de los arranques. En aras de simplificar el cálculo, Monasterio asume $\tan f = 0$ y encuentra que la condición de estabilidad se satisface si la relación entre el espesor K y la semiluz l es «al poco mas ó menos, $K/l \geq 1/2$: asi que, con dar á la clave un valor igual á la cuarta parte de la luz, se sujeta esta boveda á que en ningun caso adquiera los movimientos hasta aqui considerados, cualquiera que sea el angulo de arranque» (p.55) Una panorámica histórica sobre el tema de la estabilidad del arco plano, antes y después de Monasterio, se ofrece en Huerta (2012).

Arcos no simétricos y permutaciones tr, rt y trt

Volviendo al arco no simétrico, Monasterio analiza las tres últimas permutaciones *tr*, *rt* y *trt* correspondientes a los movimientos de las Fig.5, Fig.6 y Fig.7, respectivamente.

En el caso del modo de colapso de la Fig.5, las componentes F_l y F' del peso $(M_l + M')$ deben satisfacer estos tres requisitos:

1) la dirección de la fuerza $F_{\prime}$ debe situarse en el límite exterior del cono de rozamiento en la junta $M_{\prime} N_{\prime}$;

2) la fuerza F' debe pasar simultáneamente por el punto del intradós M' y situarse en el límite exterior del cono de rozamiento en la junta $M_{\prime} N_{\prime}$;

3) la fuerza resultante obtenida por la composición de F' y el peso $(M'' - M')$; de la dovela derecha debe pasar por el punto del intradós N''.

En el caso del modo de colapso de la Fig.6, las componentes $F_{\prime}$ y F' del peso $(M_{\prime} + M')$ deben satisfacer estos tres requisitos:

1) la fuerza $F_{\prime}$ debe pasar por el punto del intradós $M_{\prime}$;

2) la fuerza F' debe pasar simultáneamente por el punto del trasdós N' y situarse en el límite exterior del cono de rozamiento en la junta $M'N'$;

3) la fuerza resultante obtenida de la composición F' y del peso $(M'' - M')$ de la dovela derecha debe situarse en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M''N''$.

Por último, en el caso del modo de colapso de la Fig.7, las componentes $F_{\prime}$ y F' del peso $(M_{\prime} + M')$ deben cumplir estos cuatro requisitos:

1) la fuerza F' debe pasar por el punto del intradós M';

2) la fuerza $F_{\prime}$ debe pasar por el punto del trasdós $N_{\prime}$;

3) la fuerza resultante obtenida por la composición de $F_{\prime}$ y del peso $(M_{\prime\prime} - M_{\prime})$ debe situarse en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M_{\prime\prime}N_{\prime\prime}$;

4) la fuerza resultante de la composición de F' con el peso $(M'' - M')$ debe situarse en el límite interno del cono de rozamiento en la junta $M''N''$.

Las tres condiciones de estabilidad correspondientes al cumplimiento de los requisitos anteriores dan como resultado

(O)

$$Mom''(M'' - M') - \frac{(M' + M_{\prime})\cos(\alpha_{\prime} + f)}{\sin(\alpha' + f + \alpha_{\prime} + f)}\{(z'' - x')\cos(\alpha' + f) - (u'' - y')\sin(\alpha' + f)\} \geq 0$$

(P)

$$(M'' - M')\cos(\alpha'' - f) - \frac{\sin(\alpha'' - f - \alpha' - f)Mom_{\prime}(M_{\prime} + M')}{(x_{\prime} - z')\cos(\alpha' + f) + (y_{\prime} + u')\sin(\alpha' + f)} \geq 0$$

(Q)

$$M''-M'-\frac{\left(M_{II}+M'\right)\left\{\left(u'+y'\right)\tan\left(\alpha''-f\right)+z_{I}-x'\right\}-Mom_{I}\left(M_{I}+M'\right)\left\{\tan\left(\alpha''-f\right)+\tan\left(\alpha_{II}+f\right)\right\}}{\left(u_{I}+y'\right)\tan\left(\alpha_{II}+f\right)-\left(z_{I}-x'\right)}\geq 0$$

Arcos simétricos

Con respecto a la condición de estabilidad (Q) particularizada para arcos simétricos, Monasterio demuestra que «es imposible que en semejantes bovedas tenga lugar el movimiento mixto de quinta especie, no teniendolo el puro de traslacion ni los dos mixtos de primera e segunda especie; y de consiguente interamente superfluo el tener presente la condicion (Q) para tales casos» (p.57).

Las otras dos condiciones (O) y (P) especializadas para arcos simétricos dan las siguientes condiciones que impiden los movimientos de las Fig.16 y Fig.17, respectivamente.

(6) $$M''Z''-M'X'-M'\left(z''-x'\right)\cot\left(\alpha'+f\right)\geq 0$$

(7) $$M_{I}\left(x_{II}-z_{I}\right)\cot\left(\alpha'-f\right)-M_{II}X_{II}+M_{I}Z_{I}\geq 0$$

Escribiendo estas últimas condiciones bajo otra forma, Monasterio se da cuenta de que los términos que se comparan en estas nuevas formas

> son funciones parecidas á los primeros miembros de las condiciones (F), (G), (M) y (N). Por consiguiente, (…) los movimientos de tercera y cuarta especie quedan sofocados en el hecho de no tener lugar el puro de rotacion y los mixtos de primera y segunda especies. Baxo este concepto podemos ya asegurar que la boveda de medio punto, tal como la hemos considerada en el num.43, se mantendra firme sin adquirir ninguna especie de movimiento. (p.58)

Esta contundente conclusión sobre la imposibilidad del mecanismo de La Hire de la Fig.16 es el origen de la crítica de Monasterio hacia las fórmulas habitualmente adoptadas para determinar el espesor de los estribos de acuerdo con dicho mecanismo. «Por desgracia», escribe refiriéndose a los análisis realizados por

Bossut, Prony y Couplet en la primera parte de su memoria sobre el empuje de los arcos,

> en la mayor parte de los problemas dirigidos al mismo objeto que vemos resueltos en las obras sobre empuje de bovedas, se considera el trozo superior del arco con el movimento que acabamos de mencionar; y asi es que aparecen enteramente inutiles los unicos calculos que en aquellas obras presentan á primera vista una aplicacion directa á la practica. (p.59)

Buscando «otras condiciones mas sencillas»

La última parte del capítulo tercero la dedica Monasterio a cumplir el propósito de simplificar las condiciones de estabilidad para el arco no simétrico, pues es consciente de que «la discusión completa para asegurarse de la solidez de un arco que no es simetrico, exige calculos muy largos y embarazosos por los muchos terminos y variables que contienen las siete fórmulas (A), (C), (H), (I), (O), (P), (Q)». (p.59) Ahora bien, estas siete condiciones

> manifiestan bajo la forma que tienen, cuando las bovedas se mantienen firmes y cuando se vienen abajo, segun es positivo ó negativo su primer miembro; pero si observamos que de estos dos objetos el principal que interesa mas al arte de construir, es el saber que el arco, tal cual lo projectamos, se halla con las proporciones devidas para sostenerse, notaremos que puede muy bien haber otras condiciones mas sencillas que se dirijan solamente á manifestar esta circunstancia. (p.60)

En resumen, Monasterio demuestra que cada una de las siete condiciones de estabilidad se cumple si se cumplen también las cinco condiciones siguientes

$$\text{(R)} \qquad \begin{cases} M_{,} \cot(\alpha_{,} - f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0 \\ M_{,} \cot(\alpha_{,} - f) - M'X'/(K + x') \geq 0 \\ M_{,} Z_{,}/(K + z_{,}) - M'X'/(K + x') \geq 0 \\ M_{,} Z_{,}/z_{,} - M'X'/x' \geq 0 \\ M_{,} Z_{,}/z_{,} - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0 \end{cases}$$

Como puede observarse, estas nuevas condiciones (R) contienen sólo tres expresiones diferentes tanto para los términos positivos como para los negativos, de modo que

> se pongan por $M_{,}\cot(\alpha_{,}-f)$, $M_{,}Z_{,}/(K+z_{,})$ y $M_{,}Z_{,}/z_{,}$ los menores de los dos minimos, y por $M'\cot(\alpha'+f)$, $M'X'/(K+x')$ y $M'X'/x'$ los mayores de los dos maximos[11], que cada una de estas seis expresiones tiene segun se refiera al lado derecho de la clave o al lado izquierdo, sin parar ya la atencion en la diferencia que admitimos al principio de la obra entre los accentos superior é inferior de las letras; concluiremos por fin que satisfechas esta cinco condiciones de la manera expresada, que-dan imposivilitados los arcos de adquirir cualquiera especie de movimiento. (pp. 65–66)

Una vez encontradas estas formas más simples para las condiciones de estabilidad de los arcos no simétricos, Monasterio observa que

> las condiciones (R) se reducen á las mismas que hallamos con todo rigor para el caso de ser el arco simetrico, y esta coincidencia prueba que dichas condiciones reunen á una forma sencilla y de facil discusion, la circumstancia apreciable de apartarse lo menos posible de las primitivas que dá directamente la consideracion del movimiento. (p. 66)

La economía obtenida con las condiciones (R) es realmente notable. Sin embargo, una inspección de estas desigualdades lleva necesariamente a la conclusión de que no pueden garantizar el mismo nivel de generalidad de las siete anteriores.

Por ejemplo, en el caso de un arco simétrico los dos términos rotacionales que aparecen en la tercera de las condiciones (R) requieren que el empuje horizontal se aplique en el trasdós de la clave, ya que los brazos de palanca $(K+z_{,})$ y $(K+x')$ se miden desde el punto del trasdós de la junta de la clave. Por tanto, esta condición es menos general que la condición (E) obtenida anteriormente, ya que no puede tener en cuenta la activación del modo de colapso rotacional puro de la Fig.12. Este mecanismo puede darse en realidad en el caso de un arco semicircular que soporte un relleno horizontal del mismo peso específico del arco cuando K=1,0481r, con dos articulaciones en el trasdós a 28° y 90° de la clave y una

articulación en el intradós a 67° de la clave para cada mitad del arco (Foce 2005). Por supuesto, si el empuje se aplicara en el punto de trasdós de la junta en clave, como requiere la tercera de las condiciones (R), se encontraría un espesor mínimo ligeramente mayor que el de colapso, por lo que esta condición es favorable a la seguridad en todos los casos en que el colapso corresponde a un punto de aplicación del empuje interno a la junta en clave.

Del mismo modo, los dos términos rotacionales que aparecen en la cuarta de las condiciones (R) requieren que el empuje horizontal se aplique en el intradós de la clave, ya que los brazos de palanca z_i y x' se miden desde el punto del intradós de la junta de la clave. Por lo tanto, esta condición es menos general que la condición (F) que impide el modo de colapso rotacional de la Fig.13.

Además, a partir de la inspección de la segunda y quinta de las condiciones (R) nos vemos obligados a darnos cuenta de que se refieren a mecanismos simétricos no incluidos en la lista de Monasterio y, en consecuencia, no pueden ser utilizados para prevenir el mecanismo de La Hire y su opuesto en las Fig.16 y Fig.17.

Por ejemplo, el término rotacional negativo en la segunda condición (R) contiene el brazo de palanca $(K + x')$ y entonces requiere que el empuje se aplique en el trasdós de la clave. Ahora bien, si el mínimo del término traslacional positivo corresponde a una junta por debajo de la junta asociada al máximo del término rotacional negativo, entonces la condición es adecuada para evitar el mecanismo de colapso de la Fig.14 de Monasterio, con articulación en el trasdós de la clave. Por el contrario, si el mínimo del término traslacional positivo corresponde a una junta por encima de la junta asociada al máximo del término rotacional negativo, entonces la condición es adecuada para prevenir un nuevo modo de colapso, que es el cuarto modo dibujado en la Fig.6 tomada de Michon (1857), y no el mecanismo de la Fig.17 de Monasterio.

Del mismo modo, el término rotacional positivo en la quinta condición (R) contiene el brazo de palanca z_i y entonces requiere que el empuje se aplique en el intradós de la clave. Ahora bien, si el mínimo del término rotacional positivo corresponde a una junta por encima de la junta asociada al máximo del término traslacional negativo, entonces la condición es adecuada para impedir el mecanismo de la Fig.15 de Monasterio, con articulación en el intradós de la clave.

Por el contrario, si el mínimo del término rotacional positivo corresponde a una junta por debajo de la junta asociada al máximo del término traslacional negativo, entonces la condición es adecuada para prevenir el séptimo modo de Michon, y no el mecanismo de la Fig.16 de Monasterio.

Una comparación entre los ochos modos de colapso representados por Monasterio y Michon para el arco simétrico muestra que el mecanismo de La Hire y su opuesto considerados por Monasterio en las Fig.16 y Fig.17 faltan en la lista de Michon, donde son sustituidos por el séptimo y cuarto modo, respectivamente. Si observamos el séptimo modo de Michon y la Fig.16 de Monasterio, comprenderemos fácilmente que la única diferencia cinemática se refiere a la ubicación de la junta donde se produce la rotación relativa alrededor del intradós: en la clave en el séptimo modo de Michon y en los riñones en la Fig.16 de Monasterio, en la misma junta donde también se produce el deslizamiento relativo hacia dentro. Una diferencia cinemática análoga —en cuanto a la rotación relativa alrededor de los trasdós— existe entre el cuarto modo de Michon y la Fig.17 de Monasterio.

Ahora bien, la segunda y la quinta de las condiciones (R) suponen que el empuje horizontal se aplica en el trasdós y en el intradós de la junta de clave, respectivamente, por lo que estas condiciones son propias para investigar los modos de colapso cuarto y séptimo de Michon y no los mecanismos de Monasterio de las Fig. 17 y Fig.16.

Obviamente, sólo un análisis estático —en términos de trabajo virtual o mediante el método de máximos y mínimos— podría confirmar si uno de estos modos de colapso puede realmente ocurrir, y cuál de ellos. Como ya hemos visto, para el arco de medio punto de espesor constante los análisis realizados por Monasterio demuestran indirectamente que ninguno de ellos puede tener lugar, ya que pueden activarse otros modos, dependiendo de los valores del espesor y del coeficiente de rozamiento.

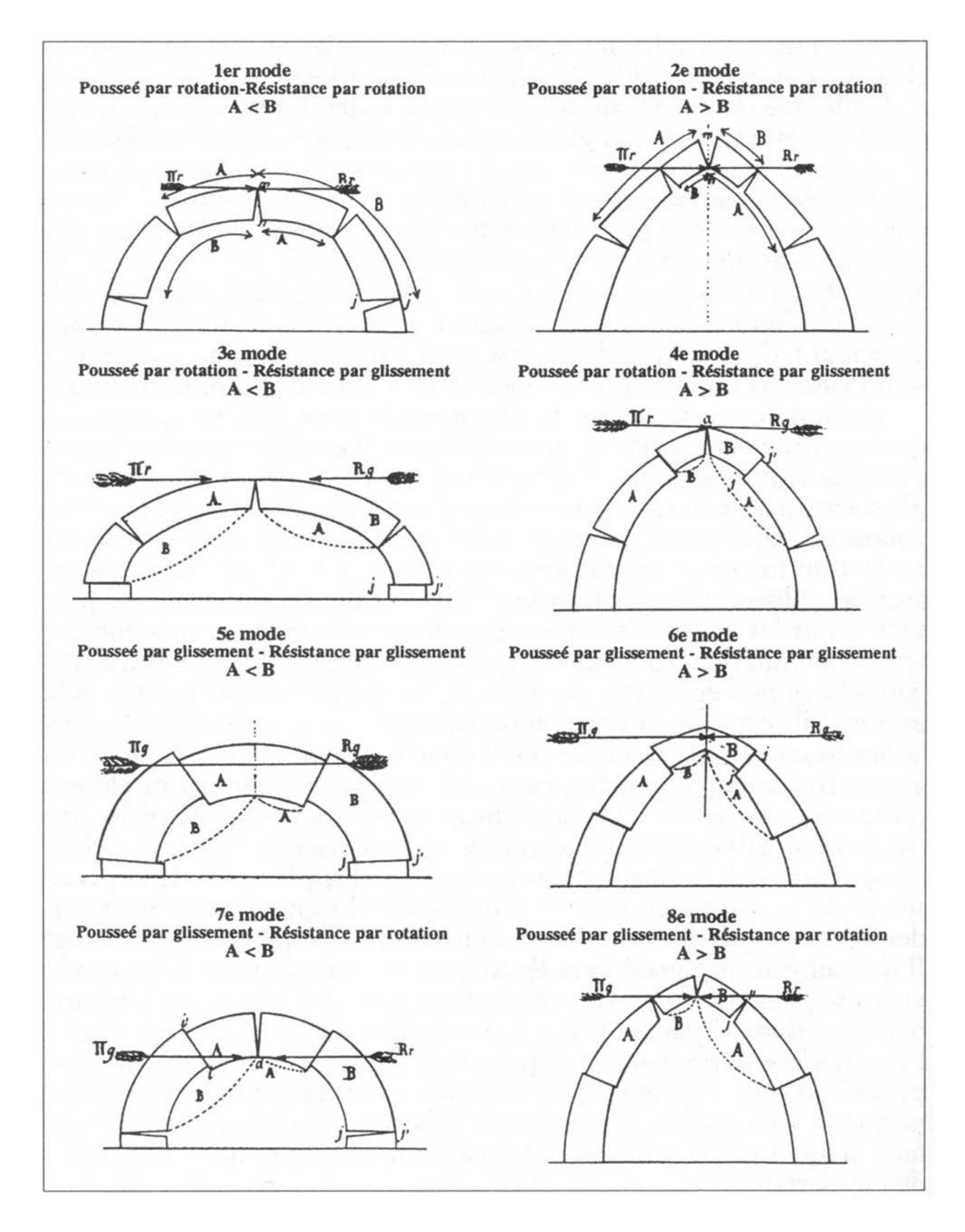


Figura 6. Los ocho modos de colapso dados por Michon (1857)

La carga de colapso

Una última observación significativa sugerida por Monasterio al final del tercer capítulo se refiere a la búsqueda de la carga de colapso además del peso propio. Mediante las mismas condiciones (R), escribe el autor, «estamos ya en disposicion de averiguar facilmente el mayor peso que puede pasar por el estrados de un arco, sin que este se venga abajo: problema que, apesar de suponer simetrica la boveda, no podria resolverse antes de la simplificacion admitida sino empleando las condiciones (A), (C), (H), (I), (O), (P) y (Q) con toda su generalidad» (p.66).

Este nuevo problema interesante consiste primero en sustituir el peso M' y su momento $M'X'$ en los términos negativos de las condiciones (R) por las nuevas cantidades $M'+P$ y $M'X'+Py'$ «dando á entender por P el peso en cuestion, y considerando el mayor momento que puede tener este: á igualar, despues de hecha la substitucion anterior, á cero los primeiros miembros; y despejando la incognita P de las equaciones resultantes, á tomar finalmente por valor de P el menor de los minimos de los segundos miembros» (p.66).

Como la distancia y' es la coordenada horizontal del punto intradós M' respecto al sistema de referencia con origen en el punto del intradós A de la junta de la clave, deducimos que la carga P se supone aplicada en el punto del trasdós B de la junta clave.

CAPITULO CUARTO

El cuarto y último capítulo del manuscrito trata de la estabilidad del sistema arco-estribo, un tema de fundamental importancia sobre el que, sin embargo, la bibliografía ha prestado habitualmente menos atención que la dedicada a la estabilidad de las bóvedas (Huerta 2010).

Monasterio restringe en seguida el análisis a los sistemas simétricos y considera razonablemente sólo los tres movimientos que antes había encontrado más probables para el arco simple, es decir, el mecanismo de traslación puro de la Fig.10, el mecanismo de rotación puro de la Fig.12 (con articulación en el trasdós de la clave) y el mecanismo mixto de la Fig. 14 (de nuevo con articulación en el trasdós de la clave). Entre estos mecanismos, correspondientes a las condiciones

de estabilidad (B), (F) y (M) respectivamente, desprecia pronto «el puro de traslacion que rarissima vez tiene lugar á causa del rozamiento». De los dos restantes, Monasterio desarrolla un extenso análisis del mecanismo rotacional puro y sólo en las últimas páginas del manuscrito discute brevemente el mixto.

El mecanismo de colapso rotacional para el sistema arco-estribo

Así, la principal condición de estabilidad a satisfacer es la desigualdad (F) (o, lo que es lo mismo, la tercera de las desigualdades (R) si fijamos $M_l = M''$, $Z_l = Z''$ y $z_l = z''$), es decir

$$\frac{M''Z''}{z''+K} - \frac{M'X'}{x'+K} \geq 0$$

Como hemos visto, esta condición se ha dado para el arco sin estribos. Con referencia al sistema arco-estribo de la Fig.21, la distancia vertical $z''+K$ se convierte en el brazo de palanca *FG* del empuje aplicado en el trasdós de la clave con respecto al borde exterior *F* de la base del estribo, mientras que la distancia vertical conserva su significado de brazo de palanca *BP* del empuje con respecto al punto *M* del intradós, donde *K* es el espesor *AB* de la clave.

Ahora bien, el objetivo del análisis de Monasterio se refiere a la cuantificación correcta del peso M'', que entra en el término positivo que representa la *resistencia*, y del peso M', que entra en el término negativo que representa la *potencia*. En este sentido, es muy crítico con lo que ya se ha escrito sobre el tema:

> Cuantos Autores han tratado de dar formulas para determinar el grueso de estribos, otros tantos desenvuelven sus calculos valiendose de dos supuestos tan falsos come perjudiciales á la solidez de las bovedas. Primeramente consideran cada pie derecho formado de un solo trozo de piedra, y de consiguiente capaz de oponer al tiempo de volcarse una resistencia mayor de la que tiene realmente. En segundo lugar, suponen que todas las dovelas rematan en el extrados, lo que no sucede asi generalmente, pues cuando este se halla formado de una linea recta horizontal, que es el caso mas comun, entonces las dovelas son al poco mas o menos iguales á la clave, y el extrados resulta de llenar de mamposteria el interior, y de silleria el exterior de los riñones del arco,

> esto es, el espacio que queda entre las cabezas de las dovelas y la linea horizontal que forma el extrados. (p.67)

Con el fin de cuantificar la «verdadera resistencia» de los estribos frente al empuje del arco, Monasterio desarrolla un tratamiento sutil y original que pone de manifiesto, por un lado, su preocupación por las buenas prácticas constructivas en cantería y, por otro, su gran capacidad para interpretar esas prácticas en términos mecánicos. El principio constructivo sobre el que Monasterio desarrolla su discusión «se reduce á suponer todos los sillares de un mismo tamaño, y situados de forma que sus juntas verticales de lecho correspondan al medio de las horizontales de los sillares inferior y superior mas inmediatos: pues en efecto, esto es lo que en buena construccion se trata de satisfacer en cuanto lo permiten los materiales.» (p.68)

Partiendo de este principio constructivo y teniendo en cuenta la activación del mecanismo rotacional puro, Monasterio imagina que tras descimbrarse la parte *AM* del arco de la Fig.21 «adquiere un pequeño movimiento de rotacion alrededor del punto *M*; y es evidente que todos los sillares que arrastren consigo las dovelas contenidas en el arco *AM*, deverán entrar á formar juntamente con estas la expression de *M′* y de su momento *M′X′*» (p.68). Este pequeño movimiento de rotación en torno al punto *M* del intradós genera inevitablemente la formación de una línea de fractura *Mm*1.2.3.4.5.6.*n* que sigue las juntas verticales y horizontales de la fábrica de relleno, «dando á conocer por el lado derecho los sillares que permanecen unidos á la parte inmovil de la boveda, y por el izquierdo los que acompañan al arco *AM* en su movimiento».

Si se supone que el sistema arco-estribo colapsa por rotación, entonces la parte derecha del sistema con respecto a la línea de fractura tiende a rotar alrededor del borde exterior *F* del estribo, y, por tanto, debe generarse una línea de fractura similar $e.1.e'2.e.3e'.4.e.5.e'$ en la fábrica de la base del estribo. Como consecuencia, las hiladas de piedra $E.e.1.e'2.e.3e'.4.e.5.e'.E$ de la superficie a la izquierda de esta nueva línea de fractura «se hallan incapaces de acompañar á los demas que componen el machon . . . y por lo mismo no pueden entrar en el calculo para medir la resistencia» (p.69).

Como señala Monasterio, la dirección de las dos líneas de fractura depende de la relación entre la longitud y la altura de los sillares que componen la fábrica. Si estas dimensiones, junto con las de las dovelas del arco, se consideran infinitesimales respecto a la dimensión global del sistema, «se podra poner sin error substancial por M' la superficie $AMNBA$ (Fig.22) y por M'' el espacio $ACeFGBA$», donde las dos líneas de fractura pueden confundirse con los segmentos rectos MN y Fe formando con la vertical dos ángulos iguales y «cuya tangente sea igual á la mitad de la longitud ó vase de un sillar, dividida por la altura de este». Monasterio añade acertadamente que «tanto menor se haga la relacion entre la longitud y la altura de los sillares, tanto menor será la resistencia que oponen los machones, y maior el empuje del arco $AMNBA$: por que el triangulo EFe y el momento de la superficie $AMNBA$ tomado en el punto M, aumentan al paso que las lineas MN y Fe se acercan mas á la vertical» (p.69).

Ahora bien, la relación longitud/altura podría tomar teóricamente un valor infinitamente grande y sólo en este caso irreal «los machones obrarán del mismo modo que si estubieran formados de un solo trozo de piedra». Excluyendo este límite superior, Monasterio observa que el límite inferior de esa relación

> no puede ser nulo, sino igual por lo menos á la unidad. La razon de esto ultimo es bien clara, por que los sillares, cualquiera que sean sus dimensiones, han de ser precisamente rectangulares ó cuadrados: si lo primero, con ordenarlos de suerte que el lado mayor sirva de asiento y el menor de altura, como asi se hace en efecto cuando se siguen las reglas de buena construccion, tendremos la relacion de estas cantidades mayor que 1: y si sucede lo segundo, esta relacion será constantemente igual á la unidad . . . Como la mayor parte de obras se suelen construir de mamposteria que admite piedras de diferentes dimensiones, sin guardar en su colocacion tanto orden ni simetria como la silleria, con la que solo se revisten, cuando mas, las partes exteriores y visibles; sera lo mas prudente caminar en estas investigaciones bajo el supuesto menos favorable á la resistencia de los estribos, esto es, suponer que las lineas MN y Fe forman con la vertical el angulo cuya tangente $= \frac{1}{2}$ del radio: lo que viene á ser lo mismo que hacer cuadradas las caras de los sillares, ó de las piedra que componen la mampostería. (p.70).

Esta elección razonable —y por tanto conservadora— implica que la altura de la «parte muerta» del estribo (Fig.22) es el doble del espesor $EF = v$ del propio estribo. En consecuencia, pueden darse dos situaciones distintas según que la altura $Ee = 2EF$ sea menor o mayor que la altura real $CE = h$ del estribo.

En el primer caso ($EF \leq \frac{1}{2}CE$) Monasterio dice que se puede aplicar directamente la condición (F), con el único requisito de restar el peso del triángulo EFe al peso de la parte estabilizadora del sistema. Por el contrario, en el segundo caso ($EF > \frac{1}{2}CE$)

> el machon no puede . . . obrar exactamente de la manera considerada . . . porque la linea Fe, tirada desde el punto *F*, y que separa la parte muerta del machon de la parte que se opone el empuje del arco, no cortara ya á la línea *CE* entre los puntos *C* y *E* que señalan los limites del pie derecho, si no solamente á su prolongacion que para el asunto es una linea imaginaria. (p.70).

Esta última circunstancia requiere nuevas consideraciones porque «si la boveda . . . se halla con fuerza suficiente para hacer volcar al machon, este debe ya abrirse y moverse de uno de los dos modos que vamos á exponer, diversos del que conviene al caso de ser *EF* menor que $\frac{1}{2}CE$».

Estos dos modos se refieren a los movimientos que la parte *MCHfNM* (Fig.23), limitada por las dos líneas de fractura *MN* y *Ff*, puede sufrir en el momento del colapso. La fábrica de esta parte recibe de la parte *AMNBA*, en el punto del intradós *M*, el empuje horizontal que genera la resistencia al rozamiento a lo largo de sus juntas verticales. Si esta resistencia es lo suficientemente grande como para impedir el movimiento hacia abajo de la pieza *MCHfNM*, entonces toda la superficie *MCHFGNM* «tomara el movimiento de rotacion, apoyada en el punto *F*, como si realmente fuera composta de un solo trozo de piedra, por que aunque los sillares superiores á la hillada *CD* se hallen sin vase durante el movimento dicho, tambien es certo que no pueden ser impelidos á vajar resvalando por sus juntas verticales de lecho sin ir contra el supuesto admitido» (p.71). Por el contrario, «debe suponerse, ademas del movimiento considerado . . . que los sillares incluidos en el espacio *MCHfNM* vajan verticalmente resvalando sin

abandonar la base fixa *CH*, á medida que el movimiento de rotacion producido al rededor del punto *F* intenta separarlos de ella» (p.71).

De estas dos posibilidades, Monasterio dice que la primera «no puede verificarse si no en arcos mucho mas rebajados que los que se usan comunmente», y la segunda posibilidad «viene acompañada de otros movimientos diversos del que se llevó en cuenta al tratar de la formula correspondiente al puro de rotacion», por lo que Monasterio aborda la nada fácil tarea de traducir esta nueva circunstancia en términos mecánicos.

El resultado de esta elaborada discusión, durante la cual Monasterio introduce cinco hipótesis conservadoras que simplifican los cálculos sin comprometer su validez, se condensa en las siguientes dos condiciones de estabilidad para determinar el espesor v del estribo cuando su altura h es tal que $v > \frac{1}{2}h$

(S) $$v \geq \sqrt{\frac{2P'(m-x) - 2P''(l-y)}{K+x}}$$

(T) $$\frac{1}{2}v^2(K+x) + vP'\tan f - P'(m-x) + P''(l-y) - P'h + \frac{1}{8}h^2(m-x) + \frac{1}{24}h^3 \geq 0$$

donde $P' = M'X'/(x+K)$ y $P'' = M'$ son las componentes horizontal y vertical de la fuerza P que el lado izquierdo de la estructura transmite al lado derecho en el punto M del intradós con coordenadas y y x, y m y l representan la montea y la semiluz del arco.

Monasterio observa que la expresión que contiene la altura h en (T), es decir

$$-P'h + \frac{1}{8}h^2(m-x) + \frac{1}{24}h^3,$$

debe calcularse para el valor de h que lo hace mínimo, y este valor es

$$h = -(m-x) + \sqrt{8P' + (m-x)^2},$$

«de suerte que no se substituirá en la condicion (T) por h otro valor que este, siendo la altura total del machon mayor que $-(m-x) + \sqrt{8P' + (m-x)^2}$; y solo en caso contrario devera ponerse dicha altura total por valor de h» (p.80).

En el caso más simple en el que $v \leq \frac{1}{2} h$, Monasterio también da la siguiente condición de estabilidad

(V) $$-\frac{2}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^2(K + m + h) + vP'' - P'(m - x) + P''(l - y) - P'h \geq 0$$

donde el primer término negativo representa el momento de la «parte muerta» del estribo con respecto al punto *F*.

Aplicaciones

Para aplicar las condiciones (S), (T) y (V) se requiere la posición de la junta de rotura *MN*. Ésta debe obtenerse por el método de máximos y mínimos. Sin embargo, escribe Monasterio, «aunque tal es el metodo que prescribe la cuestion, no le seguiremos por la mucha complicacion que acarrea en la mayor parte de casos».

Así, en el caso de los arcos de medio punto y semielípticos la junta de rotura se supone a 60° de la junta de clave «porque hemos observado que proximamente es esta la situacion que sale para dicha junta por la doctrina de maximos y minimos», de forma que las coordenadas del punto *M* resultan

$$x = m - \frac{m^2}{\sqrt{3l^2 + m^2}} \qquad y = \sqrt{\frac{3l^4}{3l^2 + m^2}}$$

En el caso de arcos circulares rebajados con apertura superior a 120°, la junta *MN* se toma de nuevo a 60° de la junta de clave y las coordenadas del punto *M* pasan a ser

$$x = \frac{l^2 + m^2}{4m} \qquad y = \frac{l^2 + m^2}{4m}\sqrt{3}$$

Por último, en el caso de arcos circulares rebajados con apertura inferior a 120° (o igual) se supone la junta de rotura en los estribos y entonces las coordenadas del punto *M* son

$$x = m \qquad y = l$$

En este último caso, la condición (S) simplemente da $v \geq 0$ y las condiciones (T) y (V) se convierten, respectivamente, en

(U) $$\tfrac{1}{2}v^2\,(K+m)+vP'\tan f - P'h + \frac{1}{24}\,h^3 \geq 0$$

(X) $$-\frac{2}{3}v^3+\tfrac{1}{2}v^2\bigl(K+m+h\bigr)+vP''-P'h \geq 0$$

Sobre esta base, Monasterio realiza cuatro aplicaciones que cubren los casos más significativos que se repiten en la práctica, a saber, el arco de medio punto, el arco semielíptico con $m=\tfrac{1}{2}l$, el arco circular con aperturas de 120° y 60°. Para cada aplicación supone $K=\tfrac{1}{10}l$, $\tan f=\tfrac{1}{2}$ e igual peso específico para la fábrica del arco, el estribo y el relleno horizontal. Los resultados numéricos de estas aplicaciones se recogen en la Tabla 1.

arco de medio punto			
(S)	(T)		(V)
$v=0{,}30l$	$0{,}30l \leq v \leq 0{,}38l$	$v=0{,}38l$	$0{,}38l \leq v \leq 0{,}47l$
$0 \leq h \leq 0{,}14l$	$0{,}14l \leq h \leq 0{,}58l$	$0{,}58l \leq h \leq 2{,}4l$	$2{,}4l \leq h \leq \infty$

arco semielíptico ($m=\tfrac{1}{2}l$)		
(S)	(T)	(V)
$v=0{,}25l$	$0{,}25l \leq v \leq 0{,}56l$	$v=0{,}56l$
$0 \leq h \leq 0{,}12l$	$0{,}12l \leq h \leq l$	$l \leq h \leq \infty$

arco escarzano 120°		
	(U)	(X)
$v=0{,}46l$	$0{,}46l$	$0{,}46l \leq v \leq 0{,}53l$
$h=1{,}07l$	$1{,}07l \leq h \leq 2{,}9l$	$2{,}9l \leq h \leq \infty$

arco escarzano 60°	
(U)	
$v<0{,}72l$	$v=0{,}72l$
$h<1{,}25l$	$1{,}25l \leq h \leq \infty$

Tabla 1. Proporciones de los estribos en relación con la semiluz l para diversos arcos, calculadas por Monasterio

Comparaciones de la teoría 'monolítica' y la regla de Derand

Monasterio es consciente de que su teoría da «las formulas necessarias para determinar con rigor y fundamento el grueso de los machones» y desarrolla intencionadamente una comparación para mostrar «palpablemente la grande diferencia que hay de suponerlos compuestos de un solo trozo de piedra, ó de diferentes segun se verifica realmente en la practica». Para la teoría 'monolítica', Monasterio utiliza su condición (V) en la que ahora se suprime el término negativo $-\frac{2}{3}v^3$ y, suponiendo $h = \frac{1}{2}l$, encuentra los resultados recogidos en la siguiente Tabla 2, donde también se recogen los resultados de su propia teoría. La conclusión es que «No es pues de estrañar, comparando estos valores de v (…), que hasta ahora se hayan mirado con entera desconfianza los resultados dados por la teorica». (pp. 86–87).

	Espesor mínimo del estribo para $h = \frac{1}{2}l$	
	teoría 'monolítica'	Monasterio
arco de medio punto	$v = 0{,}21l$	$v = 0{,}37l$
arco semielíptico ($m = \frac{1}{2}l$)	$v = 0{,}27l$	$v = 0{,}42l$
arco circular escarzano (120°)	$v = 0{,}18l$	$v = 0{,}35l$
arco circular escarzano (60°)	$v = 0{,}31l$	$v = 0{,}49l$

Tabla 2. Comparación entre estribos calculados como monolitos y por Monasterio, considerando su fractura (l = semiluz del arco)

A continuación, Monasterio introduce una segunda e inesperada comparación con estas palabras: «De todos los metodos graficos puestos en uso para hallar el grueso de machones, ninguno se aproxima mas á los resultados sacados por nuestras formulas, que uno cuyo origen es tan antiguo como desconocidos los fundamentos en que estriva» (p.87). Monasterio se refiere aquí a la llamada regla de Derand (1643), aunque no se menciona explícitamente al autor francés. Como es sabido, esta regla geométrica para calcular el espesor de los estribos no tiene en cuenta la altura real del estribo, por lo que Monasterio observa que «es preciso hacer tambien la misma abstraccion en nuestras formulas, refiriendolas á aquella altura que produzca el mayor grueso», esto es $h = \infty$. Monasterio aplica la regla

de Derand y sus fórmulas para los cuatro casos examinados y halla los valores de los espesores recogidos en la siguiente Tabla 3.

	Espesor mínimo del estribo	
	Regla de Derand	Monasterio ($h = \infty$)
arco de medio punto	$v = 0{,}50l$	$v = 0{,}47l$
arco semielíptico ($m = \frac{1}{2}l$)	$v = 0{,}57l$	$v = 0{,}56l$
arco circular escarzano (120°)	$v = 0{,}60l$	$v = 0{,}53l$
arco circular escarzano (60°)	$v = 0{,}65l$	$v = 0{,}72l$

Tabla 3. Comparación de los valores de la Regla de Derand con los de colapso para altura infinita de Monasterio (l = semiluz del arco)

Concluyendo esta comparación, observa que entre los valores derivados de su teoría y la regla de Derand «no se advierte una diferencia notable, y mucho menos entre los corrispondientes á las dos bovedas primeras, cuyos nacimientos son horizontales: circunstancia que autoriza mas el metodo mencionado, pues los Antiguos rara vez empleaban otra especie de bovedas». (p.87)[12]

Influencia de la relación longitud/altura de los sillares

Como hemos visto, las condiciones de estabilidad (S), (T) y (V) —y sus derivadas (U) y (X) para el arco rebajado— se mantienen bajo el supuesto de que la relación entre longitud y altura de los sillares se toma igual a 1. En aras de la exhaustividad, y considerando que los sillares pueden tener forma rectangular, Monasterio proporciona una versión actualizada de las condiciones (U) y (X) cuando la relación p entre la longitud y la altura es mayor que 1. Para ello basta con modificar los dos términos que expresan el momento de las superficies triangulares limitadas por las líneas de fractura, de modo que las nuevas condiciones pasan a ser

$$\frac{1}{2}v^2\,(K+m) + vP'\tan f - P'h + \frac{1}{24}\,p^2h^3 \geq 0$$

$$-\frac{2}{3}\frac{v^3}{p} + \frac{1}{2}v^2\left(K+m+h\right) + vP'' - P'h \geq 0$$

Monasterio aplica estas condiciones al caso del arco rebajado con apertura de 60° y encuentra que para $p = 2$ y $h = 0{,}5l$ el espesor requerido resulta $v = 0{,}19l$, mientras que para el mismo arco rebajado y $p = 1$ el espesor se convierte en $v = 0{,}35l$, «esto es, una cantidad casi doble de la otra». La conclusión es contundente: «De esta manera se vé como la buena ó mala calidad de los materiales influye de un modo notable en el espesor que deven tener los machones, y se pueden explicar los diferentes fenomenos que presentan bovedas de igual figura y dimensiones, undiendose las unas al paso que las otras permanecen sin hacer sentimiento ninguno». (p.88)

El mecanismo de colapso mixto para el sistema arco-estribo

Para completar el análisis, Monasterio considera también la condición de estabilidad (M) encontrada anteriormente para evitar «el movimiento mixto de primera especie», es decir, el modo de colapso mixto del arco de la Fig.14. Esta condición debe adaptarse ahora al sistema arco-estribo. Al respecto, Monasterio escribe: «Si observamos que la parte mas flaca del machon es la hallada *CD* (Fig.23) mas proxima al arranque, el trozo expresado por M'' en aquella condicion sera igual á la superficie *ACDGBA*, y el angulo $\alpha'' = 90°$, quedando el termino $M'X'/(K + x')$ de la misma forma que en los numeros anteriores.» (p. 89). Así, la condición (M) se convierte en

(Z) $$v \geq \frac{P' - P'' \tan f}{(K + m)\tan f} \geq 0$$

Monasterio sugiere tomar este valor del espesor cuando resulte mayor que el valor resultante de las condiciones rotacionales. Por tanto, admite implícitamente que también debe utilizarse la condición (Z) y señala correctamente que «en la formula (Z) influye mucho mas que en las otras, cualquiera pequeña alteracion que se haga en la friccion; por lo que será mui conveniente averiguar primero el verdadero valor de esta por medio de un experimento directo, antes de pasar á hallar la expresion de v por la formula (Z)». (p.90)

Monasterio no aplica la condición (Z) «por no presentar su discusion la menor dificultad». Nos hemos tomado la molestia de confirmar la pertinencia de su

advertencia aplicando (Z) al caso del arco rebajado con apertura de 60°, para el que Monasterio había hallado el espesor $v = 0{,}72l$ para $h > 1{,}25l$ y $\tan f = 0{,}5$. Para el mismo coeficiente de rozamiento $\tan f = 0{,}5$, la condición (Z) da $v = 0{,}55l$. Sin embargo, basta tomar $\tan f = 0{,}43$ para obtener el mismo espesor $v = 0{,}72l$ necesario para impedir el mecanismo de rotación, confirmando así la justificación de la sugerencia de Monasterio.

Investigaciones sobre las líneas de fractura de los estribos

La atención prestada a la formación de líneas de fractura responsables de una reducción significativa de la estabilidad del sistema arco-estribo se encuentra también en otros autores coetáneos de Monasterio, aunque en un nivel diferente de investigación teórica. Por ejemplo, Gauthey aborda incidentalmente el tema con el fin de interpretar las discrepancias que había encontrado entre los valores del espesor de los estribos obtenidos teóricamente a partir del mecanismo rotacional y los valores mucho mayores adoptados habitualmente en la práctica.[13]

«Se encuentra aquí», escribe Gauthey en el primer volumen de su famoso *Traité de la construction des ponts*, «una de esas contradicciones aparentes entre la teoría y la práctica, de las que las artes ofrecen numerosos ejemplos». Y prosigue:

> Para eliminarla, observemos que el análisis precedente supone necesariamente que las diferentes partes de la bóveda forman masas sólidas, todas cuyas partes están perfectamente unidas entre sí y no pueden experimentar ningún asentamiento. También supone que los estribos están asentados sobre una base totalmente incompresible y que, en caso de derrumbamiento de la bóveda, dichos estribos girarían, sin desprenderse, alrededor de su borde exterior. En general, estas suposiciones están muy lejos de la realidad. El derrumbamiento de un puente nunca podría producirse sin que se produjeran algunas disyunciones en sus estribos, por muy cuidadosamente que estuvieran construidos; e incluso si no se produjera ninguna, los estribos no podrían girar alrededor de su borde exterior, donde las piedras quedarían necesariamente aplastadas bajo la fuerza que tendrían que soportar

> y que, por esta razón, debe repartirse sobre una superficie suficientemente grande.[14] (Gauthey 1809, pp. 324–325)

En la *nouvelle* edición de la *Science des ingénieurs* de Bélidor de 1813, Navier aborda el tema desde un punto de vista cualitativo y, refiriéndose al dibujo 4 de la Lámina 6 de nuestra Fig.7, observa que

> si el estribo *AE* gira sobre el borde *D*, no se levantará en su totalidad, a menos que su espesor sea muy pequeño y las piedras formen un perpiaño, o el mortero esté suficientemente adherido. Este estribo tenderá a dividirse a lo largo del plano *DT*, inclinado en medio ángulo recto, de modo que la parte *ADT* no se levantará. Por lo tanto, esto no debe tenerse en cuenta al evaluar la resistencia del estribo . . .[15] (Bélidor 1813, p. 186)

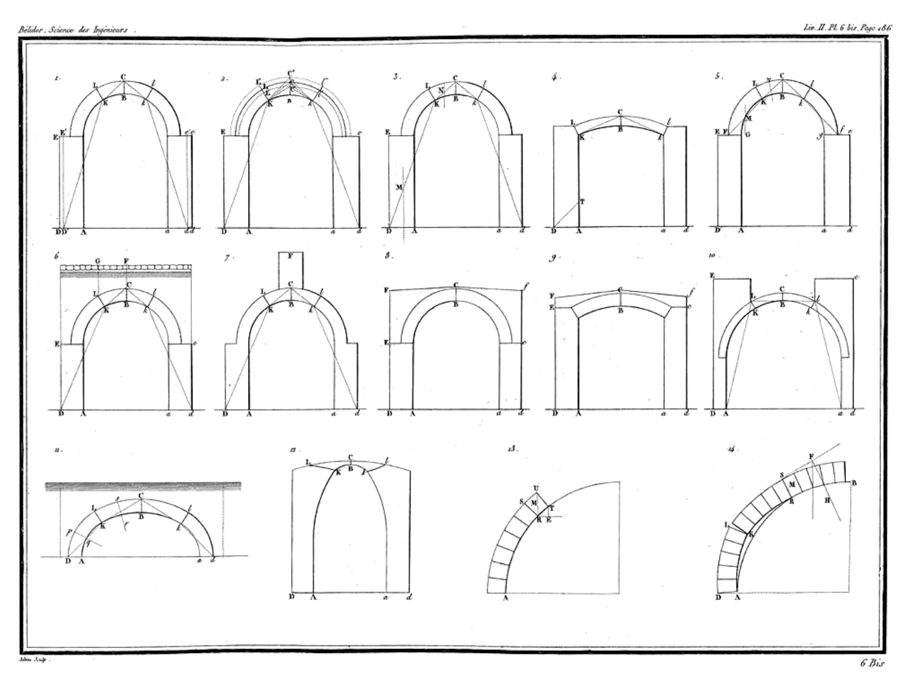


Fig.7. Lámina 6 de Bélidor (1813), donde la figura 4 muestra la línea de fractura DT del estribo

En el Apéndice *Sur la résistance des murs aux poussées* al segundo volumen del tratado de Gauthey (1813), Navier confirma su punto de vista y calcula la inclinación de la línea de fractura, supuesta a priori como una línea recta. Sabe que los muros que soportan el empuje de las bóvedas o de los suelos se suelen considerar «como masas indivisibles, o al menos como masas cuyas partes están lo suficientemente unidas como para que su adherencia sea superior a las fuerzas que tienden a separarlas».[16] Su objetivo es eliminar «lo que esta hipótesis, generalmente adoptada, tiene de precaria, o incluso de falsa» teniendo en cuenta la cohesión del mortero:

> . . . me pareció que la manera más apropiada de introducir en la cuestión la hipótesis de la divisibilidad del muro, era observar que al girar alrededor de su borde exterior, este muro tendía a dejar sobre sus cimientos un prisma de fábrica separado por un plano inclinado que pasaba por este borde, prisma que sólo podía levantarse en la medida en que el esfuerzo resultante de su peso fuera inferior a la fuerza de adherencia ejercida sobre la superficie de separación. Si esta fuerza de adherencia no fuera suficiente, . . . el momento de estabilidad del muro debería reducirse por el del prisma que se separaría de él si el muro girara.[17] (Gauthey 1813, p. 394)

La concepción de Navier de «un prisma de fábrica separado por un plano inclinado» coincide con la idea propuesta por Monasterio. Sin embargo, mientras que este último supone razonablemente que la dirección de la línea de fractura depende de la relación de los lados de los sillares, Navier descuida este aspecto constructivo y, tratando la fábrica como un continuo, busca la dirección de la línea de fractura imponiendo la equivalencia entre el momento del peso de la superficie triangular con respecto a la arista exterior del muro y el momento de la fuerza de cohesión, supuesta uniformemente repartida a lo largo de la superficie de separación, con respecto a la misma arista. De esta equivalencia deduce matemáticamente que «el plano de separación del prisma inmóvil está inclinado medio ángulo recto con respecto a la base del muro».[18] (Gauthey 1823, p. 395) Como confirmación indirecta de su conclusión, Navier cita las palabras con las que Mayniel (1808) informó del resultado de una prueba experimental en un muro

de 20 pies de altura «cuya fábrica se había dejado consolidar: se rompió a ras de suelo, formando una línea de fractura que podría haber sido la diagonal de un cuadrado del espesor del muro».[19] (Mayniel 1808, p.98)

Navier retoma este argumento en sus *Leçons* de 1826 y 1839 y en las ediciones posteriores del *Traité* de Gauthey. Gracias a la gran difusión de este tratado, la intuición cualitativa de Gauthey se cita, por ejemplo, en la *General theory of bridge construction* de Haupt (1851, p.126) y en la monografía de Cain sobre el *Voussoir arch* (1879, p.75), donde también se acepta sin discusión la hipótesis de Navier sobre la línea de fractura a 45° (Fig.8).

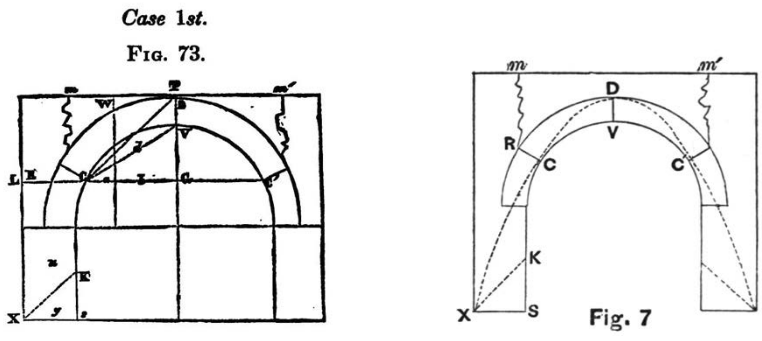


Figura 8. Dibujos de la línea de fractura en estribos por Haupt (1851) (izquierda) y Cain (1879) (derecha)

Vicat (1832) informa de cuatro pruebas experimentales sobre pequeños modelos de ladrillos en seco, concebidos para simular un estribo de fábrica sometido a la acción de vuelco de un cable, como en los puentes colgantes. Del informe de Vicat se desprende que en estos modelos «las hiladas se adhieren entre sí del mismo modo que en la construcción de mayor tamaño. No hay adherencia en las juntas verticales y sólo fricción en las horizontales».[20] (Vicat 1832, p. 394) Este es exactamente el tipo de fábrica al que se refiere Monasterio. Entonces no es sorprendente que la línea de fractura siga la forma asumida en su análisis (Fig.9), a pesar de que Navier (1833, p. 42) consideró los experimentos de Vicat como una confirmación de su propio resultado.

De manera sorprendente, y sin ninguna referencia a estudios anteriores sobre la materia, Walther (1855, pp. 391–392), (Fig. 10), llama la atención sobre la influencia que el tamaño de los bloques tiene sobre la línea de fractura.

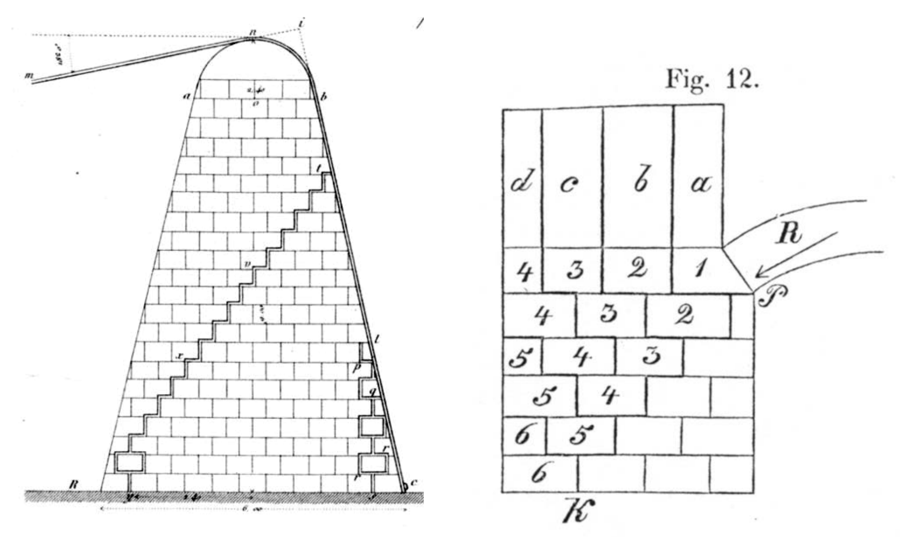


Fig.9. Líneas de fractura en Vicat (1832)

Fig.10. Fractura de un estribo en Walther (1855)

LISTA DE REFERENCIAS

Aita, D., Sinopoli, A. 2019. Collapse of non-symmetric masonry arches with Coulomb friction: Monasterio's approach and equilibrium analysis, *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 24th Conference of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics, AIMETA 2019, Rome 15–19 September 2019, code 23885, pp. 1928–1938.

Aita, D., Sinopoli, A. 2019. The pure sliding collapse mode of non-symmetric masonry arches: a critical review of Monasterio's contribution and an alternative formulation, in Papadrakakis M., Fragiadakis M. (eds.), COMPDYN 2019, *7th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Crete, Greece, 24–26 June 2019, pp. 613–621.

Aita, D., Sinopoli, A. 2020. Revisiting Monasterio's unpublished manuscript: a critical review of the collapse modes analysis of non-symmetric and symmetric masonry arches, *International Journal of Architectural Heritage*, vol.14, pp. 762–793.

Aita, D., Sinopoli, A. 2021. Two different approaches for collapse of nonsymmetric masonry arches: Monasterio's treatment versus limit equilibrium analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, vol.147 (10), 04021071.

Albuerne, A., Huerta, S. 2010. Coulomb's theory of arches in Spain ca.1800: the manuscript of Joaquín Monasterio, in Baochun Chen, Jiangang Wei (eds.), *Arch'10, 6th International Conference on Arch Bridges* (Fuzhou, China, October 11–13 2010), Fuzhou, China, College of Civil Engineering, Fuzhou University, pp. 354–362.

Audoy. 1820. Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau, *Mémorial de l'Officier du Génie*, n. 4, pp. 1–96.

Becchi, A. 2004. *Q.XVI. Leonardo, Galileo e il caso Baldi: Magonza, 26 marzo 1621*, Venezia, Marsilio.

Becchi, A., Foce, F. 2022. Jacques Heyman, Maestro dell'*unknowable*, in Heyman, J., *Skeletons. A technical autobiography written for instruction and entertainment*, Roma, Edizioni di Storia e Letteratura, pp. V–XIII.

Bélidor, B.F. 1813. *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile. Nouvelle édition avec des Notes, par M. Navier*, Paris, Firmin Didot.

Bruyère, L. 1823. Ponts en pierre. En *Etudes relatives à l'art des constructions. Ier Recueil.* Paris: Bance Aine.

Cain, W. M. 1879. *Voussoir arches applied to stone bridges, tunnels, domes and groined arches*, New York, Van Nostrand.

Clairac y Saenz, Pelayo. 1877-1908. *Diccionario general de arquitectura e ingeniería.* Madrid : Zaragozano y Jayme, 4 vols.

Coulomb, C.-A. 1776. Essai sur une application des règles *de maximis et minimis* à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans*, 7 année 1773, pp. 343–382.

Couplet, P. 1732. Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1730, pp. 117–141.

Degrand, E., Résal, J. 1887. *Ponts en maçonnerie. I. Stabilité des voûtes*, Paris, Baudry & C. Derand, F. 1643. *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*, Paris, chez Sebastien Cramoisy.

Durand-Claye, A. 1867. Note sur la vérification de la stabilité des voûtes en en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression, Annales des Ponts et *Chaussées*, vol. 13, I sem., pp. 63–93.

Foce, F. 1996. «Bit by bit, lacuna by lacuna» in the name of Edoardo Benvenuto, in Becchi A. et al. (eds.), *Towards a History of Construction*, Birkhäuser, Basel, pp. 551–565.

Foce, F. 2000. Il contributo dell'École d'Artillerie et du Génie di Metz alla teoria delle volte in muratura, in Graciani A., Huerta S., Rabasa E., Tabales M. (eds.), *Actas del Tercer Congreso Nacional de Historia de la Construcción* (Sevilla, 26–28 octubre 2000), Madrid, Instituto Juan de Herrera, pp. 309–315.

Foce, F. 2002. *Sulla teoria dell'arco murario. Una rilettura storico-critica*, in Becchi A., Foce F., *Degli archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Venezia, Marsilio.

Foce, F. 2005. On the safety of the masonry arch. Different formulations from the history of structural mechanics, in Huerta S. (ed.), *Essays in the history of the theory of structures, in honour of Jacques Heyman*, Madrid, Instituto Juan de Herrera, pp. 117–142.

Foce, F. 2007. Milankovitch's *Theorie der Druckkurven*. Good mechanics for masonry architecture, *Nexus Network Journal*, vol.9, pp. 185–210.

Garidel. 1835. Mémoire sur le calcul des voûtes en berceau, *Mémorial de l'Officier du Génie*, n. 12, pp. 7–72.

Gauthey, E.-M. 1809. *Traité de la construction des ponts.* Tome I, Paris.

Gauthey, E.-M. 1813. *Traité de la construction des ponts.* Tome II, Paris.

Haupt, H. 1851. *General theory of bridge construction*, New York, Appleton.

Heyman, J. 1966. The stone skeleton, *International Journal of Solids and Structures*, vol.2, pp. 249–279

Heyman, J. 1985. The crossing piers of the French Panthéon, *The structural Engineer*, 63A, pp. 230–234.

Heyman, J. 1999. Navier's Straitjacket, *Architectural Science Review*, vol.42, pp. 91–96.

Heyman, J. 2022. *Skeletons. A technical autobiography written for instruction and entertainment*, Roma, Edizioni di Storia e Letteratura.

Huerta, S. 2001. Mechanics of masonry vaults: the equilibrium approach, in Lourenço P., Roca P. (eds.) *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*, Guimaraes, pp. 47–69.

Huerta, S., Foce, F. 2003. Vault theory in Spain between XVIII and XIX century: Monasterio's *Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas*, in Huerta S. (ed.), *Proceedings of the First International Congress on Construction History* (Madrid, 20–24 January 2003), vol.II, Madrid, Instituto Juan de Herrera, pp. 1155–1166.

Huerta, S. 2004. *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

Huerta, S., Kurrer, K.-E. 2008. Zur baustatichen Analyse gewölbter Steinkonstruktionen, in Jager W. (ed.), *Mauerwerk-Kalendar 2008*, Berlin, Ernst & Sohn, pp. 373–422.

Huerta, S. 2010. The safety of masonry buttresses, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Engineering History and Heritage*, vol.CLXIII, pp. 3–24.

Huerta, S. 2012. Wedges and plate-bandes: mechanical theories after De la Hire, in Gargiani R. (ed.), *L'architrave, le plancher, la plate-forme. Nouvelle histoire de la construction*, Lausanne, pp. 405–435.

Huerta, S. 2015. Designing by 'Expérience': Lecreulx Model Tests for the Design of the Abutments of the Bridge of Fouchard. En *Masonry Structures: Between Mechanics and Architecture*. D. Aita, O. Pedemonte, K. Williams, eds. Heidelberg, New York: Birkhäuser, pp. 21–47.

La Hire, Ph. 1731. Sur la construction des voûtes dans les édifices, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1712, pp. 69–77.

Lecreulx, F. M. 1774. *Mémoire sur la nature de la poussée des voûtes, formées d'un seul arc de cercle, contre les culées, et expériences sur les effets qui en résultent* (Ms. 233. Tome 21). Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées.

Le Seur, T., Jacquier, F., Boscovich, R. G. 1743. *Parere di tre mattematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro sul fine dell'anno 1742*, Roma.

Mayniel, J.-H. 1808. *Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement*, Paris, D. Colas.

Michon, P.-F. 1843. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*, Metz, Lithographie de l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie. (Traducción española de E. Saavedra. 1860. *Instrucción sobre la estabilidad de las construcciones*. Madrid: Imprenta Nacional. Con numerosas adiciones y tablas en las Notas finales).

Michon, P.-F. 1857. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*, Metz, Lithographie de l'École d'Application.

Milankovitch, M. 1907, Theorie der Druckkurven, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55, pp. 1–27.

Navier, C.-L.-M.-H. 1826. *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, Paris, Didot.

Navier, C.-L.-M.-H. 1833. *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, Paris, Carilian-Goeury (II ed.).

Perronet, J.-R. 1777. Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts, et sur différents mouvements que prennent les voûtes pendant leur construction, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1773, pp. 33–50.

Perronet, J.-R. 2005. *La construcción de puentes en el siglo XVIII* (edición de A. de las Casas, E. González Redondo). Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU.

Persy, N. 1825. *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'école royale de l'Artillerie et du Génie*, Metz, Lithographie de l'École Royale de l'Artillerie et du Génie.

Petit. 1835. Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires, *Mémorial de l'Officier du Génie*, n. 12, pp. 73–150.

Poleni, G. 1748. *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano*, Padova, Stamperia del Seminario.

Poncelet, J.-V. 1835. Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes, *Mémorial de l'Officier du Génie*, n. 12, pp. 151–213.

Prieto Castrillo, F. 2002. «Análisis y transcripción de la 'Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas' de Monasterio». Trabajo del Curso de Doctorado sobre 'Mecánica de las Estructuras Antiguas: Historia, Teoría y Práctica,' (Dirs. R. Aroca, J.M. Avila, S. Huerta). E.T.S. Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid.

Rondelet, J.-B. 1802-17. *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*, Paris.

Rumeu de Armas, Antonio. 1980. *Ciencia y tecnología en la España ilustrada: la Escuela de Caminos y Canales*. Madrid, Turner.

Saavedra, E. 1860. Nota sobre la determinacion del problema del equilibrio de las bóvedas, *Revista de Obras Publicas*, n.9, año VIII, pp. 101–104.

Sáenz Ridruejo, Fernando. 1990. *Ingenieros de Caminos del siglo XIX*. Madrid: Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Schulz, F.J.E. 1808. *Versuch einiger Beiträge zur hydraulischen Architektur*, Königsberg, bei Friedrich Nicolovius.

Sinopoli, A., Corradi, M., Foce, F. 1997. A modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches, *Journal of engineering mechanics (ASCE)*, 123, pp. 204–213.

Vicat, L.J. 1832. Influence du mode d'attache des chaînes sur la résistance des ponts suspendus, *Annales des ponts et chaussées*, No. 49, pp. 394–397.

Walther, F. 1855. Praktisches Verfahren zur Construction der Mittellinie des Drucks in Tonnengewölben, *Zeitschrift für Bauwesen*, 5, pp. 383–392.

NOTAS

[1] Como hemos visto, en la p.4 Monasterio dice que un trozo puede moverse «apoyado en uno de los extremos de su junta de rotura, ó resvalando á lo largo de ella» y probablemente da por sentado que las letras *r* y *t* representan rotaciones y traslaciones *absolutas*. Sin embargo, en las Figs. 2, 3, 4 de los mecanismos no simétricos el trozo central sufre un movimiento de rotación *relativa* y no absoluta alrededor de los bordes de las juntas de rotura.

[2] La única excepción se refiere al caso de la «bóveda adintelada» comentado en la p.54, n.45 del Manuscrito, donde el mecanismo de colapso requiere que en cada arranque se produzca necesariamente un movimiento compuesto de traslación y rotación.

[3] Todos los autores mencionados aquí, a excepción de Navier y Durand-Claye —*ingenieurs des ponts et chaussées*— eran militares de carrera y profesores de la École d'Artillerie et du Génie de Metz. Probablemente fue en esta escuela donde se elaboró el *corpus* más completo de estudios sobre la estabilidad de las bóvedas de fábrica simétricas en la primera mitad del siglo XIX (Foce 2000).

[4] La Fig.7 de Monasterio es en cierto modo engañosa, ya que la traslación de la dovela derecha en la junta $M''N''$ está desafortunadamente dibujada con respecto a la parte fija del arco. Sin embargo, está claro por la discusión de Monasterio y por razones cinemáticas que esta traslación ocurre de M'' a N''.

[5] En relación con esta estrategia operativa hay que hacer notar que, como señalaron por primera vez Aita y Sinopoli (2019, 2020, 2021), el enfoque 'cinemático' de Monasterio impone condiciones de equilibrio «locales» para cada mecanismo analizado. Estas condiciones «locales», de las que hemos dado tres ejemplos anteriormente, no garantizan el equilibrio «global» del sistema, por lo que, en principio, el enfoque de Monasterio no es seguro a menos que se investiguen todos los mecanismos de colapso posibles variando la posición de las juntas de ruptura, el espesor del arco y el coeficiente de rozamiento.

[6] En el Apéndice 2 hemos recogido la lista de las condiciones de estabilidad dadas por Monasterio.

[7] El punto r, no indicado en la Fig.18, es el punto de intersección de las prolongaciones de las dos líneas de puntos $M'N_I$ y $R_{II}M_{II}$.

[8] Pour rendre ce changement de courbure plus sensible, & pour distinguer la partie de la voûte qui tend à renverser les culées & les piles des parties inférieures qui résistent à cet effort, j'avois fait tracer avant le décintrement, une ligne horizontale sur les voussoirs des têtes de l'arche, du dessus d'un vingt-huitième cours à l'autre, & d'autres lignes obliques au droit des reins, depuis les extrémités de cette ligne horizontale, jusqu'à l'endroit où se fait la jonction du septième cours avec le mur en évasement de chaque culée.

[9] ce point d'inflexion auquel doit se faire la séparation des deux actions qui agissent en sens contraire, étoit d'ailleurs rendu sensible par le joint qui s'étoit ouvert en cet endroit.

[10] La idea de que las partes de un arco de medio punto puedan moverse como en el mecanismo mixto aquí analizado tiene un lejano precedente del siglo XVII en las *Exercitationes* de Bernardino Baldi, para lo cual véase Becchi (2004)

[11] Aunque hay tres términos positivos (cuyo mínimo hay que buscar) y tres términos negativos (cuyo máximo hay que buscar), Monasterio considera «los menores de los dos minimos» y «los mayores de los dos maximos» porque la tercera y cuarta de las condiciones

(R) corresponden a movimientos opuestos, por lo que sólo hay que investigar el más probable de ellos.

[12] La 'Regla de Derand' es, en realidad, una regla gótica para calcular los estribos góticos de las bóvedas de crucería. La regla aparece publicada por primera vez mediados del siglo XVI en el perdido manuscrito de Baccojani. A finales del mismo siglo reaparece en el Manuscrito de Martínez de Aranda. Finalmente, la publica Derand en 1643. La recoge después Blondel, De Challes, De La Rue, Rondelet, . . . Después se reproduce innumerables veces en los tratados de arquitectura hasta llegar al siglo XX. Desde el siglo XVII se interpreta, incorrectamente, como una regla para los estribos de arcos simples. Los valores que da son inseguros para los estribos de arcos y bóvedas de cañón. La única manera de conciliar la regla con los cálculos es considerar que da valores cercanos a los de colapso. Para el detalle de la historia de su origen, aplicación y validez, véase Huerta (2004, pp. 142-148, p. 380). Ver también, Huerta (2010).

[13] La posibilidad de fractura del estribo ya era conocida por los discípulos de Perronet. En particular F. M. Lecreulx realizó en el decenio de 1770 ensayos sobre distintos modos de fractura de los estribos durante la construcción del puente Fouchard. Lecreulx consideró la posibilidad de una línea de fractura a 45°, pero también el fallo por deslizamiento. Escribió una memoria (Lecreulx 1774) que no se llegó a publicar; se conserva el manuscrito en la École des Ponts et Chaussées, pero sin las láminas. Afortundamente éstas fueron publicadas posteriormente por Bruyère (1823). Los ensayos de Lecreulx se discuten en detalle en Huerta (2015).

[14] On retrouve ici une de ces contradictions apparentes entre la théorie et la pratique, dont les arts offrent beaucoup d'exemples. Pour la faire disparaître, nous observons que l'analyse précédente suppose nécessairement que les différentes portions de la voûte forment des masses solides dont toutes les parties sont parfaitement liées entre elles, et ne peuvent éprouver aucun tassement. Elle suppose également que les culées sont établies sur une base entièrement incompressible, et que, dans la chûte de la voûte, ces culées tourneraient, sans se disjoindre, autour de leur arrête extérieure. Ces suppositions sont, en général, bien éloignées de la verité. La chûte d'un pont ne pourrait gueres arriver sans qu'il ne se fît quelques disjonctions dans ses culées, avec quelque soin qu'elles eussent été construites; et quand même il ne s'en fairait aucune, les culées ne pourraient point tourner autour de leur arête extérieure, où les pierres s'écraiseraient nécessairement sous l'effort qu'elles auraient á soutenir, et qu'on doit chercher, par cette raison, à repartir sur une surface suffisament considérable.

[15] si le piédroit AE vient à tourner sur l'arête D, il ne sera pas soulevé en entier, à moins que son épaisseur ne soit très-peu considérable et que les pierres ne fassent parpain, ou que l'adhésion des mortiers ne soit suffisament grande. Ce piédroit tendra à se partager suivant le plan DT, incliné de la moitié d'un angle droit, en sorte que la partie ADT ne sera point soulevée. Donc, on ne doit point en tenir en compte dans l'évaluation de la force du piédroit . . .

[16] comme des masses indivisibles, ou du moins comme des masses dont les parties sont assez bien liées entre ells pour que leur adhérence surpasse les forces qui tendent à les désunir.

[17] . . . ce qui cette hypothèse, généralment adoptée, a de précaire, ou même de faux, . . . il m'a paru que la manière la plus convenable d'introduire dans la question l'hypothèse de la divisibilité du mur, était d'observer que'en tournant autour de son arête extérieure, ce mur tendait à laisser sur sa fondation un prisme de maçonnerie séparé par un plan incliné passant par cette arête, lequel prisme ne pourrait être soulevé qu'autant que l'effort résultant de son poids serait moins grand que la force d'adhésion exercée sur la surface de séparation. Il faudrait donc, si cette force d'adhésion n'était pas suffisante, . . . retrancher du moment de stabilité du mur, celui du prisme qui s'en séparerait si ce mur prenait un movement de rotation.

[18] le plan de séparation du prisme immobile est incliné sur la base du mur de la moitié d'un angle droit.

[19] dont on avait laissé consolider la maçonnerie: il s'est rompu au niveau du sol, en formant une ligne de rupture qui eût pu dans le profil être la diagonale d'un carré qui eût l'épaisseur du mur.

[20] les assises sont appareillées en liaison comme cela se pratique en grande. L'adhérence est nulle suivant les joints verticaux et résulte uniquement du frottement sur les joints horizontaux.

Apéndice 1. Lista de autores citados en el Manuscrito

En este Apéndice 1 figuran los autores citados en el Manuscrito, los comentarios de Monasterio sobre sus contribuciones y las referencias bibliográficas completas de las obras a las que Monasterio hace referencia.

A lo largo del Manuscrito, estos autores aparecen citados sólo por su apellido y, por lo general, sin referencias bibliográficas.

Bossut: p.9; p.59
Bouguer: p.23
Coulomb: p.9
Couplet: p.19; p.33; p.46; p.59
Lahire: p.33
Perronet: p.32; p.33
Prony: p.19; p.59
Rondelet: p.19; p.48
Taramas: p.19

COMENTARIOS DE MONASTERIO

p.9: Coulomb, Bossut

«Enterados de todo cuanto dejamos dicho, nos fuera ya facil dar una justa idea de merito de las mejores obras que hay escritas sobre el empuje de bovedas, haciendo relacion al plan que sus Autores devian haber seguido para que sus calculos presentasen aplicaciones utiles á la practica. Veriamos que M. Coulomb la hubiera desempeñado mejor que ningun otro, si establecidos los problemas con major generalidad y resueltos en mayor numero, no hubiera confundido en una sola las dos fuerzas horizontales dimanadas de considerar un trozo, ya como potencia, ó ya como resistencia: suposiciones que hacen se diferencien entre si aquellas fuerzas, constantemente en los movimientos de rotacion, y en los de traslacion cuando se introduce el rozamiento. Con respecto á M. Bossut observariamos que dirigiendose principalmente á estabelecer en las bovedas el equilibrio de traslacion, la mayor parte de sus formulas vienen á ser meras especulaciones de calculo; y solamente el problema que resuelve para hallar el grueso de machones, podria ser util en algun caso al arte de construir, si hubiera considerado el trozo superior que produce el empuje, con movimiento de rotacion en lugar del de traslacion que nunca ó rarissima vez se verifica en la practica.»

p.19: Couplet, Prony, Taramas, Rondelet

«Couplet y Prony, al determinar el empuje que hace el Arco contra los estrivos en el concepto de girar estos al rededor del punto exterior de sus vases, dirigen las fuerzas en que descomponen el peso de la parte superior de la boveda, por medio de sus juntas de lecho; y Taramas, Rondelet y otros consideran á estas mismas fuerzas con direcciones diferentes, haciendolas pasar por el centro de gravedad de la resultante, esto es del peso descompuesto. Ambos procedimientos, ademas de dar á la componente que produce el empuje, momentos diferentes entre si y del que debe realmente tener, son enteramente arbitrarios y en ninguna manera aplicables al problema que se intenta resolver, conforme manifestaremos claramente en el n.º 51, que es en donde con mas particularidad toca tratar de este punto.»

p.23: Bouguer

«Este resultado prueva la incompativilidad que hay de conseguir lo que pretende M. Bouguer en su memoria del año 1734, cujo objeto se reduce á averiguar las curbas mas aptas que deben formar las medias naranjas pare que sus dobelas tengan, prescindendo del rozamiento, una estavilidad capaz de resistir á otros esfuerzos extraños, ademas de los puramente dimanados de su mutuo empuje. La razon por que M. Bouger (sic) no se encuentra con este inconveniente al desenvolver sus calculos, proviene de suponer el trozo superior de los dos que considera, haciendo solamente veces de potencia, y el inferior de resistencia; siendo asi que debia igualmente discutir el caso contrario»

p.32: Perronet

«asi es que para tales casos no nos queda otro arbitrio que quitar las cimbras de la forma prevista por M. Perronet en la memoria que dió con el mismo objeto en 1773 á la Academia de Ciencias de Paris, la cual se halla tambien en el suplemento á suas obras»

p.33: Perronet, Couplet, Lahire

«M. Perronet, á fin de confirmar teoricamente sus observaciones, se vale para el puente de St. Edme de Nogent de un resultado deducido por M. Couplet en el problema que resuelve (veanse las memorias de ciencias de Paris año de 1729) con el objeto de hallar el peso que sostiene una cimbra antes de poner la clave, y para el Puente de Neuilli emplea la hipotesis que admite M. Lahire (veanse las mismas, año de 1712) con la mira de determinar la junta de rotura que se manifiesta en un arco que se viene abajo de resultar de no tener los estrivos la suficiente solidez; pero tanto la hipotesis de este ultimo autor, como el resultado de M. Couplet se refieren á dos cuestiones bien diferentes de la que acaba de ocuparnos»

p.46: Couplet

«lo que indica que el grueso $K = 0.1061r$ dado por Couplet á fin de impedir el movimiento puro de rotacion, es incapaz de conseguir dicho objeto. Esta diferencia de resultados entre la teorica de M. Couplet y la nuestra, proviene de suponer aquel autor que el empuje mayor del arco es dado por la junta de lecho que forma con la verticale el angulo de 45°, por cuya razon lo llama angulo de rotura»

p.48: Rondelet

«M. Rondelet asegura es su Arte de construir que las medias naranjas no tienen empuje alguno, por que al aplicarles una formula suya que es un caso particular de la condicion (F), observa que queda satisfecha haciendo $K = 0$»

p.59: Bossut, Prony, Couplet

«Es verdad que M.M. Bossut, Prony, y Couplet en la primera parte de su memoria, descomponen el trozo superior en dos fuerzas que hacen pasar por medio de las juntas de rotura, con lo cual resulta el momento de las componentes contra los machones, mayor que el que nosotros venimos á considerar en la condicion (O) ó su derivada (6) refiriendo el punto N'' (Fig.16ª) al exterior de la vase de los estrivos; pero es facil demostrar, segun se insinuó ya en el num.11, que semejante proceder carece de fundamento.»

p.87: Regla de Derand (no se menciona a Derand)

«De todos los metodos graficos puestos en uso para hallar el grueso de machones, ninguno se aproxima mas á los resultados sacados por nuestras formulas, que uno cuyo origen es tan antiguo como desconocidos los fundamentos en que estriva. Consiste este metodo en dividir la curba intrados en tres arcos que abracen cuerdas iguales, y tomar despues por grueso la projeccion horizontal de la cuerda que parte del arranque»

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLETAS

Bossut, Charles. 1778. Recherches sur l'équilibre des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1774, pp. 534-566. (Lû le 12 Juillet 1770 & remis le 5 Sept. 1777).

Bossut, Charles. 1779. Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1776, pp. 587-596. (Lû le 2 Sept. 1778).

Bossut, Charles. 1805. *Investigaciones sobre el equilibrio de las bóvedas*, ver Prony 1805.

Bouguer, Pierre. 1736. Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1734, pp. 149-166. (19 Mai 1734).

Coulomb, Charles-Augustin. 1776. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans*, vol. 7, année 1773, pp. 343-382.

Couplet, Claude Antoine. 1731. De la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1729, pp.79-117. (9 Févr. 1729).

Couplet, Claude Antoine. 1732. Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1730, pp. 117-141. (15 mars 1730).

Derand, François. 1643. *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*. Paris: chez Sebastien Cramoisy.

La Hire, Philippe de. 1731. Sur la construction des voûtes dans les édifices. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1712, pp. 69-77. (27 Févr.1712).

Muller, John. 1769. *Tratado de fortificacion, ó Arte de construir los edificios militares, y civiles*, traducido en castellano, dividido en dos tomos y aumentado con notas . . . por D. Miguel Sanchez Taramas. Barcelona: Thomas Piferrer.

Perronet, Jean-Rodolphe. 1777. Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts et sur les différens mouvements que prennent les voûtes pendant leur construction. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, année 1773, pp. 33-50. (22 Avril 1773).

Prony, Gaspard Riche de. 1790. *Nouvelle architecture hydraulique, première partie*. Paris: Firmin Didot.

Prony, Gaspard Riche de, *Investigaciones sobre el empuje de las tierras, y sobre la forma y dimensiones que deben darse a los muros de revestimiento* pp. 1-39+1 estampa; *Método práctico al alcance de los obreros que tienen algún hábito de servirse de la regla y del compás para resolver con suma facilidad los principales problemas relativos a la forma y dimensiones de muros de revestimiento*, pp.41-56+1 estampa; Bossut, Charles. *Investigaciones sobre el equilibrio de las bóvedas*, pp.57-96+2 estampas, traducidas al castellano para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos, Madrid, Imprenta Real, 1805

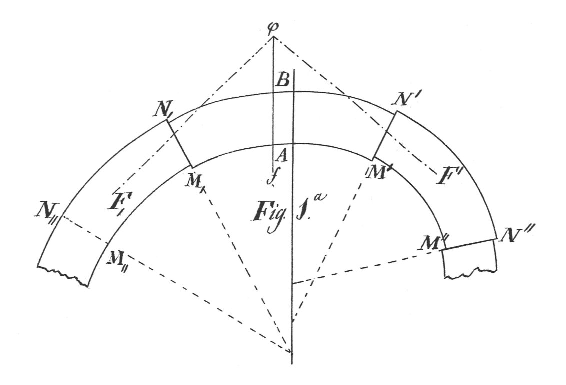
Rondelet, Jean. 1805. *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*, tome troisième. Paris: chez l'auteur.

Apéndice 2. Lista de las condiciones de estabilidad para arcos no simétricos y simétricos

Para facilitar al lector la consulta del manuscrito, a veces dispersa por la cantidad de fórmulas y pasajes matemáticos, hemos reunido todas las condiciones de estabilidad para arcos no simétricos y simétricos con los correspondientes mecanismos de colapso. Su sucesión refleja el «esqueleto» teórico de los tres primeros capítulos del texto y ofrece una visión sintética de los importantes resultados obtenidos por Monasterio. La procedencia de las figuras, tomadas de la primera lámina, se indica entre paréntesis.

PERMUTACIÓN *tt*

Arco no simétrico (Fig.1)

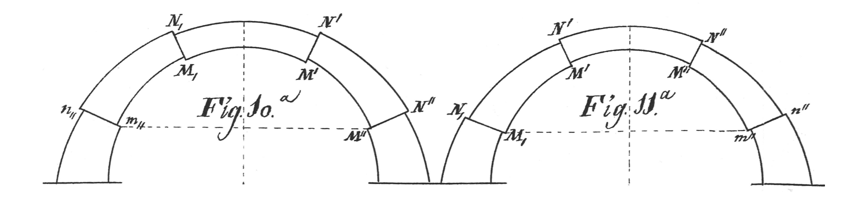


(A) p.20

$$a'M'' - b'M' - c'M_{,} \geq 0$$

$$a' = \cos(\alpha'' - f)\sin(\alpha' + f + \alpha_{,} + f)$$
$$b' = \cos(\alpha' + f)\sin(\alpha'' + \alpha_{,}) = a' + c'$$
$$c' = \cos(\alpha_{,} + f)\sin(\alpha'' - f - \alpha' - f)$$

Arco simétrico (Fig.10, Fig.11)

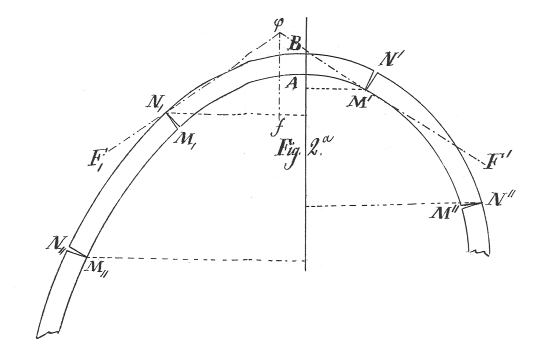


(B) p.28

$$M''\cot(\alpha'' - f) - M'\cot(\alpha' + f) \geq 0$$

PERMUTACIÓN *rrr*

Arco no simétrico (Fig.2)



(C) p.36

$$a''M''Z'' - b''M'X' + c''M_{\prime}Z_{\prime} - d''M_{\prime\prime}X_{\prime\prime} \geq 0$$

$$a'' = (x_{\prime\prime} - x')(u_{\prime} + y') + (x' - z_{\prime})(y_{\prime\prime} + y')$$

$$b'' = (z'' - z_{\prime})(y_{\prime\prime} - u_{\prime}) + (x_{\prime\prime} - z_{\prime})(u'' + u_{\prime}) = a'' + c'' - d''$$

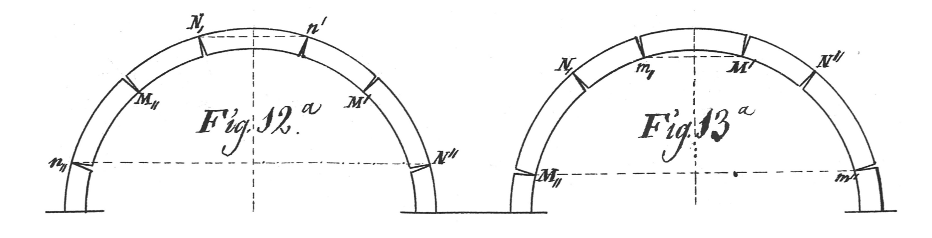
$$c'' = (z'' - x')(y_{\prime\prime} + y') + (x_{\prime\prime} - x')(u'' - y')$$

$$d'' = (z'' - x')(u_{\prime} + y') + (z_{\prime} - x')(u'' - y')$$

Arco simétrico (Fig.12, Fig.13)

(D) p.41 $$M''Z''(x' - z_{\prime}) - M'X'(z'' - z_{\prime}) + M_{\prime}Z_{\prime}(z'' - x') \geq 0$$

(E) p.41 $$-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z_{\prime} - x') + M_{\prime}Z_{\prime}(x_{\prime\prime} - x') - M'X'(x_{\prime\prime} - z_{\prime}) \geq 0$$



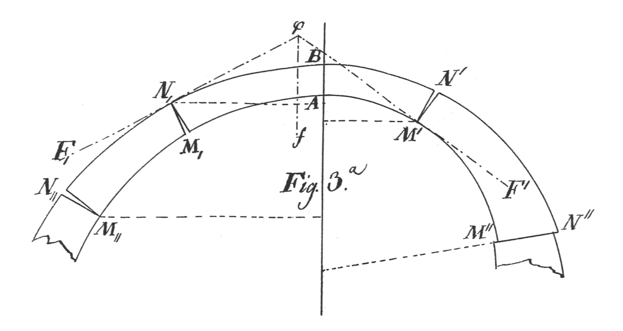
Arco simétrico con junta de rotura en la clave

(F) p.44 $$\frac{M''Z''}{z'' + K} - \frac{M'X'}{x' + K} \geq 0$$

G) p.44 $$\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - \frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}} \geq 0$$

PERMUTACIÓN *rrt*

Arco no simétrico (Fig.3)



(H) p.50

$$a''' M'' - b''' M'X' + c''' M_{,} Z_{,} - d''' M_{,,} X_{,,} \geq 0$$

$$a''' = (u_{,} + y')(x_{,,} - x') + (x' - z_{,})(y_{,,} + y')$$

$$b''' = (y_{,,} + u')\tan(\alpha'' - f) + x_{,,} - z_{,}$$

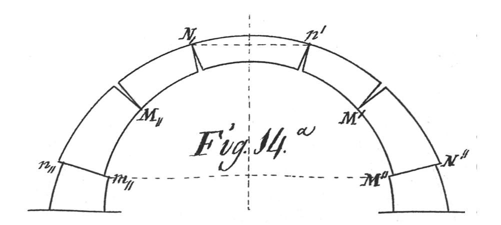
$$c''' = (y_{,,} + y')\tan(\alpha'' - f) + x_{,,} - x'$$

$$d''' = (u_{,} + y')\tan(\alpha'' - f) + z_{,} - x'$$

Arco simétrico (Fig.14)

(K) p.52

$$M''(x' - z_{,})\cot(\alpha'' - f) - (M'X' - M_{,}Z_{,}) \geq 0$$



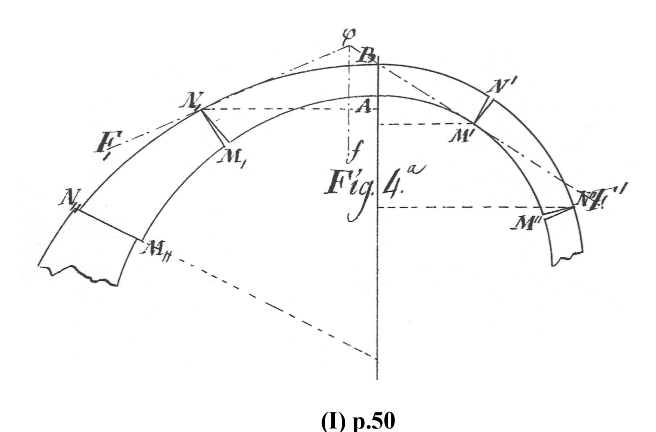
Arco simétrico con junta de rotura en la clave

(M) p.53

$$M'' \cot(\alpha'' - f) - \frac{M'X'}{K + x'} \geq 0$$

PERMUTACIÓN *trr*

Arco no simétrico (Fig.4)



(I) p.50

$$a^{IV} M''Z'' - b^{IV} M'X' + c^{IV} M_{\prime}Z_{\prime} - d^{IV} M_{\prime\prime} \geq 0$$

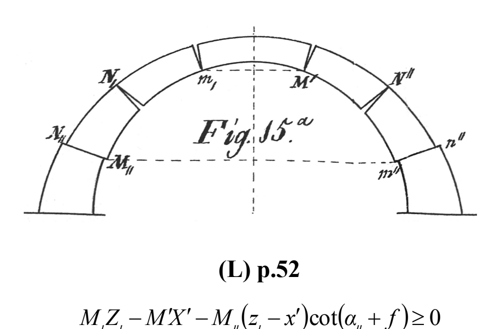
$$a^{IV} = \left(u_{\prime} + y'\right)\tan\left(\alpha_{\prime\prime} + f\right) + x' - z_{\prime}$$

$$b^{IV} = \left(u'' + u_{\prime}\right)\tan\left(\alpha_{\prime\prime} + f\right) + z'' - z_{\prime}$$

$$c^{IV} = \left(u'' - y_{\prime}\right)\tan\left(\alpha_{\prime\prime} + f\right) + z'' - x'$$

$$d^{IV} = \left(u_{\prime} + y'\right)\left(z'' - x'\right) + \left(z_{\prime} - x'\right)\left(u'' - y'\right)$$

Arco simétrico (Fig.15)



(L) p.52

$$M_{\prime}Z_{\prime} - M'X' - M_{\prime\prime}\left(z_{\prime} - x'\right)\cot\left(\alpha_{\prime\prime} + f\right) \geq 0$$

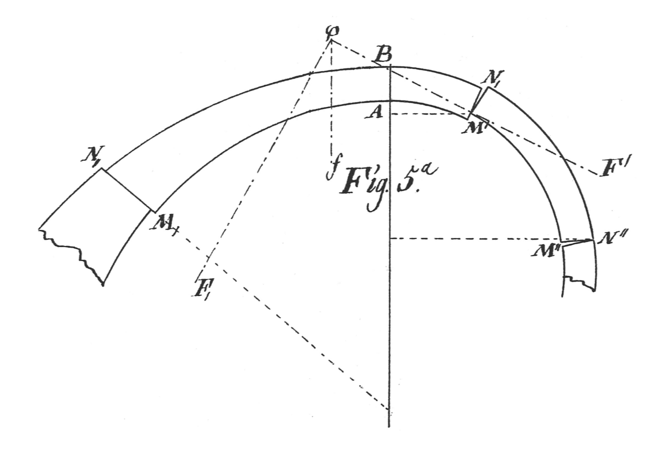
Arco simétrico con junta de rotura en la clave

(N) p.53

$$\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M_{\prime\prime}\cot\left(\alpha_{\prime\prime} + f\right) \geq 0$$

PERMUTACIÓN *tr*

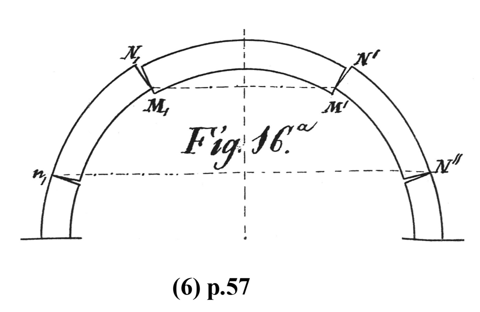
Arco no simétrico (Fig.5)



(O) p.56

$$Mom''(M''-M')-\frac{(M'+M_{,})\cos(\alpha_{,}+f)}{\sin(\alpha'+f+\alpha_{,}+f)}\{(z''-x')\cos(\alpha'+f)-(u''-y')\sin(\alpha'+f)\}\geq 0$$

Arco simétrico (Fig.16)

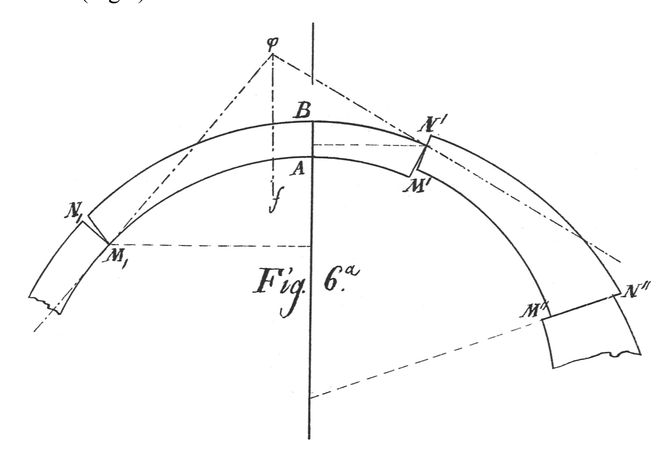


(6) p.57

$$M''Z''-M'X'-M'(z''-x')\cot(\alpha'+f)\geq 0$$

PERMUTACIÓN *rt*

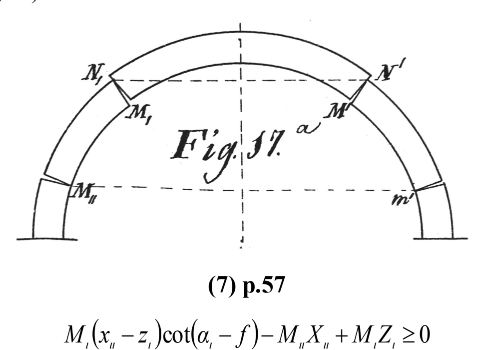
Arco no simétrico (Fig.6)



(P) p.56

$$\left(M''-M'\right)\cos\left(\alpha''-f\right)-\frac{\sin\left(\alpha''-f-\alpha'-f\right)Mom_{I}\left(M_{I}+M'\right)}{\left(x_{I}-z'\right)\cos\left(\alpha'+f\right)+\left(y_{I}+u'\right)\sin\left(\alpha'+f\right)}\geq 0$$

Arco simétrico (Fig.17)

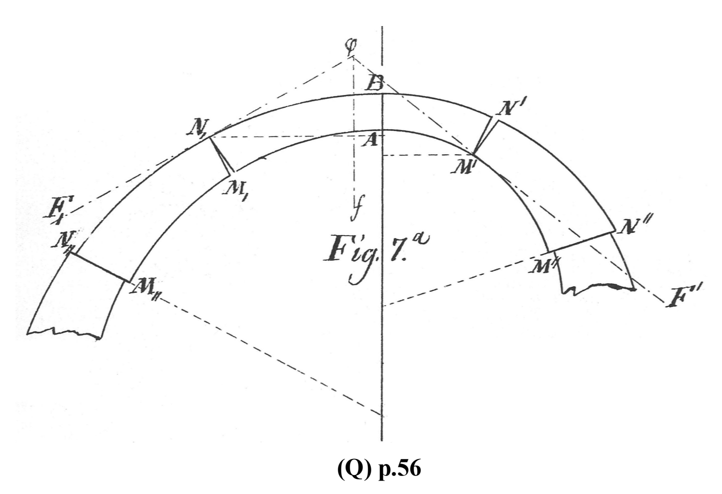


(7) p.57

$$M_{I}\left(x_{II}-z_{I}\right)\cot\left(\alpha_{I}-f\right)-M_{II}X_{II}+M_{I}Z_{I}\geq 0$$

PERMUTACIÓN *trt*

Arco no simétrico (Fig.7)



(Q) p.56

$$M''-M'-\frac{(M_{,,}+M')\{(u'+y')\tan(\alpha''-f)+z_{,}-x'\}-Mom_{,}(M_{,}+M')\{\tan(\alpha''-f)+\tan(\alpha_{,,}+f)\}}{(u_{,}+y')\tan(\alpha_{,,}+f)-(z_{,}-x')}\geq 0$$

LAS «OTRAS CONDICIONES MAS SENCILLAS» DE MONASTERIO

(R) p.65

$$\begin{cases} M_{,}\cot(\alpha_{,}-f)-M'\cot(\alpha'+f)\geq 0 \\ M_{,}\cot(\alpha_{,}-f)-\dfrac{M'X'}{K+x'}\geq 0 \\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{K+z_{,}}-\dfrac{M'X'}{K+x'}\geq 0 \\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\dfrac{M'X'}{x'}\geq 0 \\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-M'\cot(\alpha'+f)\geq 0 \end{cases}$$

Apéndice 3. Permutaciones *t*, *r*, y *rr*

Federico Foce

Como se ha visto, por razones cinemáticas Monasterio excluye las permutaciones *t*, *r* y *rr* «por que atendida la figura de cuña de las dovelas, su impenetrabilidad y la convexidad del intrados mirado desde arriba para abajo, ni un trozo puede adquirir aisladamente el movimiento de traslacion, ni menos dos solos el movimiento de rotación» (p.5).

PERMUTACIÓN *t*

En efecto, el movimiento de traslación de un solo cuerpo delimitado por dos partes fijas en las juntas $M_l N_l$ y $M'N'$ convergentes hacia abajo (Fig.1) no es admisible porque implica necesariamente una violación cinemática, es decir, una compenetración en la parte fija derecha si el cuerpo se desplaza hacia el interior a lo largo de la junta $M_l N_l$ o una separación de la parte fija derecha si el cuerpo se desplaza hacia el exterior a lo largo de la junta $M_l N_l$.

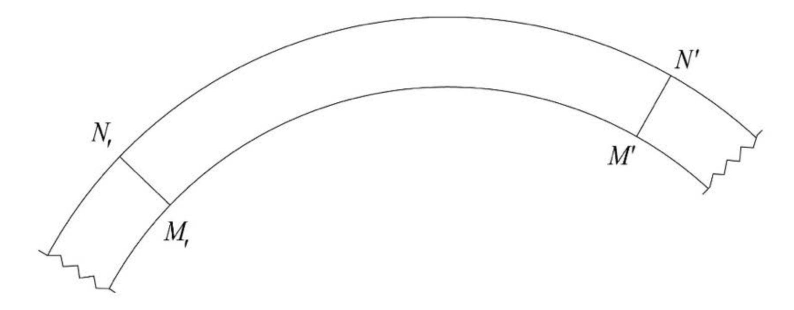


Figura 1. Segmento de arco entre juntas

PERMUTACIÓN *r*

Una consideración análoga vale para el movimiento de rotación de un solo cuerpo, si se piensa que tal rotación se realiza alrededor de un centro coincidente con el punto de intradós o de trasdós de cualquiera de las dos juntas $M_l N_l$ y $M'N'$. Por ejemplo, una rotación hacia el interior alrededor del punto de intradós M_l de la junta $M_l N_l$ implica la compenetración en la parte fija derecha; una rotación hacia el exterior alrededor del punto de trasdós N_l de la junta $M_l N_l$ implica la separación de la parte fija derecha.

Sin embargo, un solo cuerpo podrá tener un movimiento admisible si el centro *C* de rotación absoluta coincide con el punto de intersección de las rectas trazadas perpendicularmente a las dos juntas $M_t N_t$ y $M'N'$ desde el punto de trasdós N_t y el punto de intradós M', como se muestra en la Fig.2, donde también se representan las cadenas cinemáticas. Por supuesto, este movimiento de rotación alrededor del centro *C* implica que, con respecto a las partes fijas, el cuerpo tiene un movimiento compuesto de traslación y rotación, permaneciendo en contacto con ellas solo en N_t y M'.

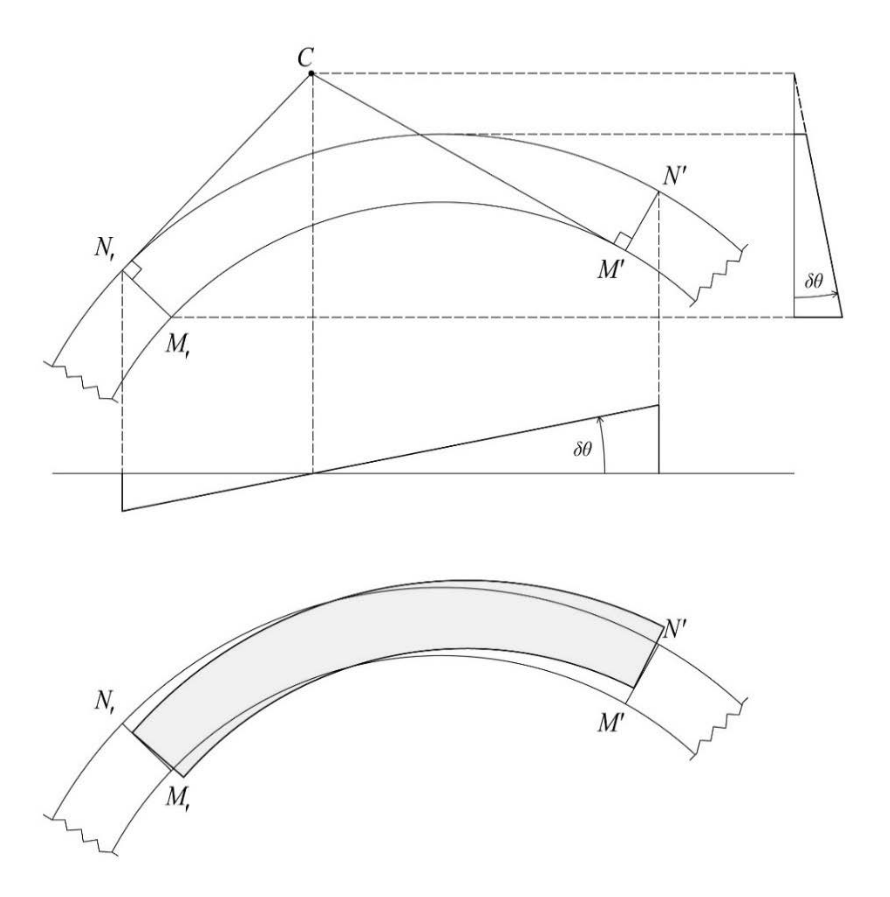


Figura 2. Movimiento admisible de rotación de un solo cuerpo

Este movimiento es lo que el propio Monasterio considera en relación con la bóveda adintelada (p.54, n.45), de la cual en la Fig.3 está representada la semiluz derecha *l* delimitada por la junta de la clave *AB* y la junta de arranque *M''N''*. Monasterio estudia esta aplicación con el objetivo de determinar el espesor mínimo para evitar el mecanismo de colapso mixto de primera especie.

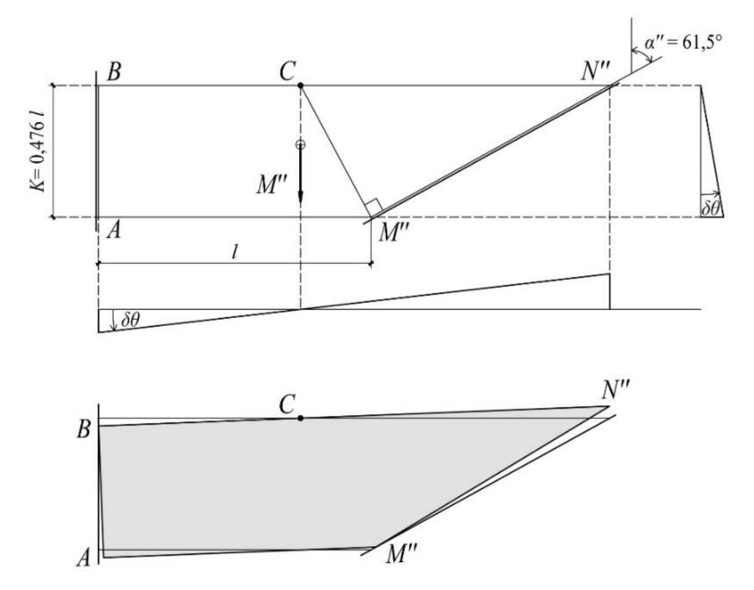


Figura 3. Mecanismo de colapso de rotación para mitad bóveda adintelada

La condición de estabilidad para este mecanismo es la (M), es decir

$$M''\cot(\alpha'' - f) - \frac{M'X'}{K + x'} \geq 0$$

En el caso de la bóveda adintelada se tiene $x' = 0$. Si, como hace Monasterio para simplificar los cálculos, se supone que la fricción es nula ($f = 0$) y si además se considera que ambos términos en la condición de estabilidad tienen sus extremos en el arranque, por lo que $M' = M''$, se encuentra que el colapso se produce cuando el espesor vale $K = 0,476l$ y el ángulo de arranque es $\alpha'' = 61,5°$. (Monasterio asume el valor aproximado $K = 0,5l$ para $\alpha'' \cong 60°$). Aparte de esta pequeña discrepancia numérica, el aspecto aquí significativo es que la mitad de la bóveda adintelada analizada por Monasterio es un solo cuerpo no simétrico que colapsa por rotación.

PERMUTACIÓN *rr*

Para discutir la permutación *rr* es útil tomar como término de comparación la permutación *tr* admitida por Monasterio, a la cual corresponde el mecanismo de su Fig.5 lámina 1, reproducido aquí en Fig.4 con la adición de las cadenas cinemáticas. El cuerpo derecho 1 gira hacia afuera alrededor del centro $N''\equiv C_1$ de la junta $M''N''$ y el cuerpo izquierdo 2 se desliza hacia adentro a lo largo de la junta M_tN_t. En la junta intermedia $M'N'$ los dos cuerpos tienen un movimiento relativo compuesto de rotación y traslación permaneciendo en contacto solo en un punto.

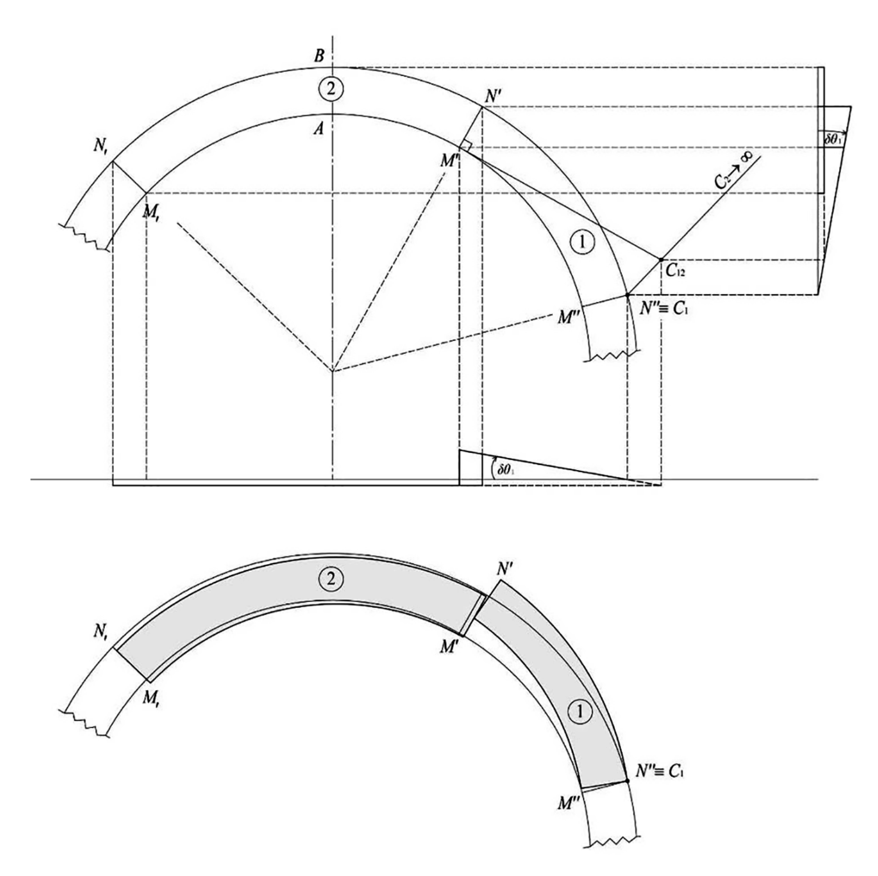


Figura 4. Movimiento asociado a la permutación *tr* admitida por Monasterio

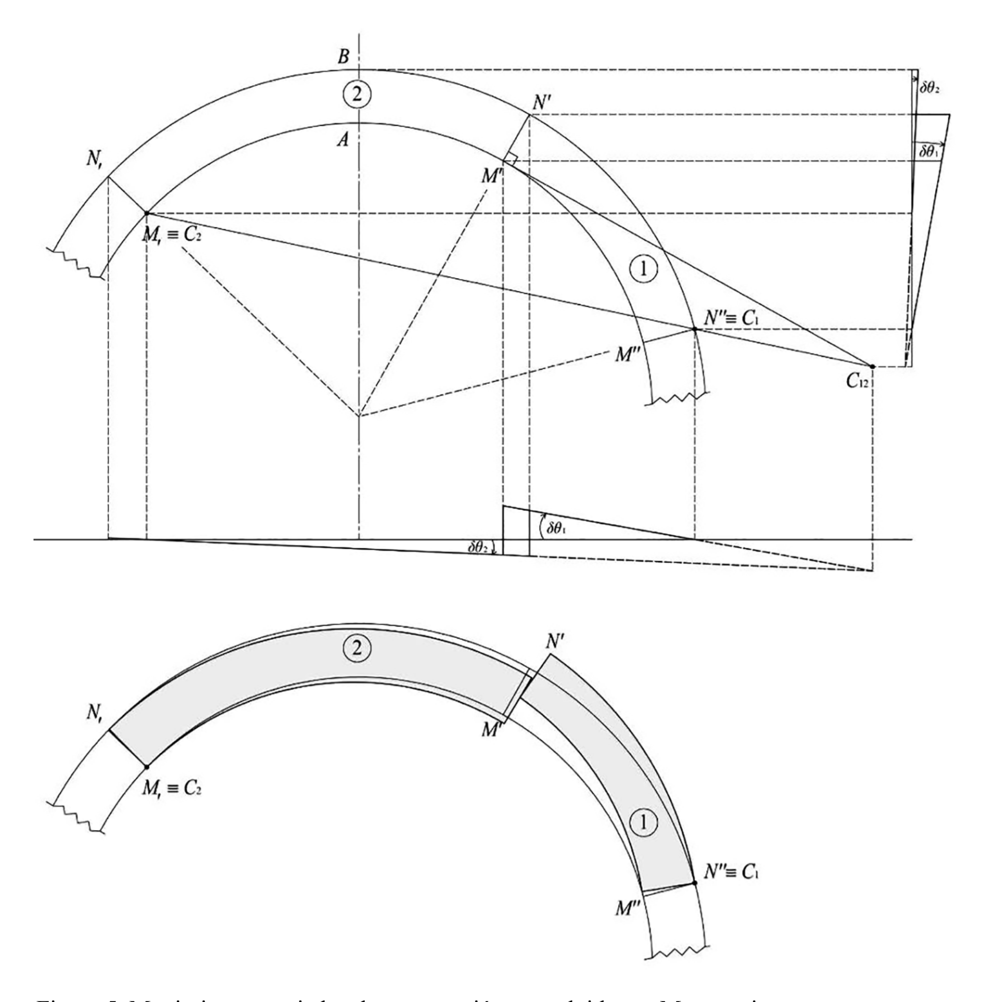


Figura 5. Movimiento asociado a la permutación *rr* excluida por Monasterio

Si el movimiento asociado a la permutación *tr* es cinemáticamente admisible, también lo es el movimiento asociado a la permutación *rr*, como se ve en Fig.5, donde también se representan las cadenas cinemáticas. El cuerpo derecho 1 gira hacia afuera alrededor del centro $N'' \equiv C_1$ de la junta $M''N''$ y el cuerpo izquierdo 2 gira hacia adentro alrededor del centro $M_r \equiv C_2$ de la junta M_rN_r. En la junta intermedia $M'N'$ los dos cuerpos tienen un movimiento relativo compuesto de rotación y traslación permaneciendo en contacto solo en un punto.

Las permutaciones *tr* y *rr* difieren en el movimiento del cuerpo izquierdo. Por la misma razón, las condiciones de estabilidad correspondientes deben ser diferentes. En efecto, mientras que para el movimiento asociado a la permutación *tr* se requiere que la fuerza F_I se encuentre en el límite exterior del cono de fricción en la junta $M_I N_I$, para el movimiento asociado a la permutación *rr* se requiere que la fuerza F_I pase por el punto M_I de la junta $M_I N_I$.

Debe mantenerse una diferencia análoga cuando se pasa del arco no simétrico al arco simétrico. Para el arco simétrico asociado a la permutación *tr* no simétrica Monasterio obtiene la siguiente condición de estabilidad (6)

$$M''Z'' - M'X' - M'(z'' - x')\cot(\alpha' + f) \geq 0$$

asociada al movimiento de Fig.16, lámina 1. Este movimiento con un grado de libertad es el llamado mecanismo de La Hire representado en la mitad izquierda de la Fig.6, con las correspondientes cadenas cinemáticas en la mitad derecha. Como se ve, el cuerpo inferior 1 gira hacia el exterior alrededor de N'' (N_{II} en la mitad izquierda), el superior 2 se desplaza verticalmente hacia el interior sin que la junta *AB* de clave se abra (como el cuerpo izquierdo en el arco no simétrico de la Fig.3 se desliza hacia el interior a lo largo de la junta $M_I N_I$) y en la junta intermedia $M'N'$ se produce el movimiento compuesto de rotación y traslación.

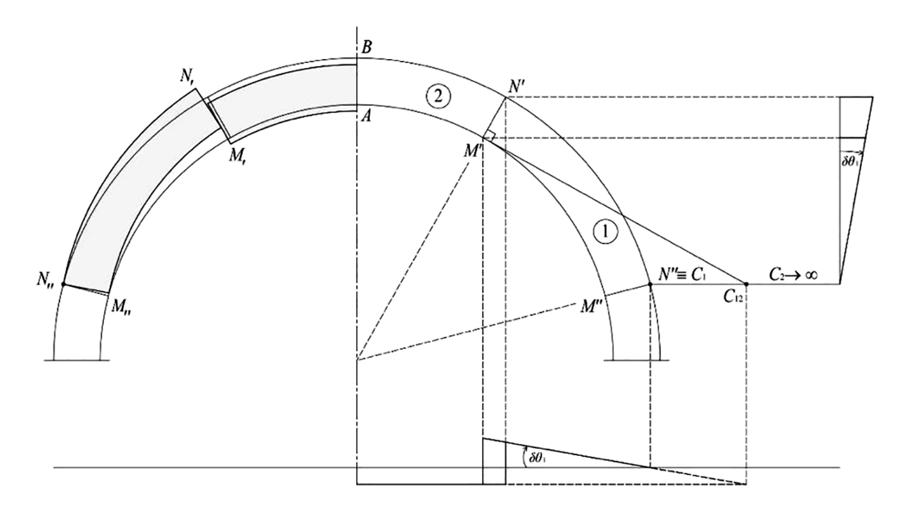


Figura 6. Mecanismo de La Hire, modo simétrico asociado a la permutación no simétrica *tr*

Si llevamos a cabo un razonamiento similar para reconocer qué mecanismo debe corresponder a la permutación *rr* cuando el arco es simétrico, es necesario que el cuerpo superior gire hacia adentro alrededor del intradós *A* de la clave (como el cuerpo izquierdo en el arco no simétrico de la Fig.4 gira hacia adentro alrededor del punto de intradós M_I). Este movimiento con un grado de libertad es el séptimo modo de collapso de Michon representado en la mitad izquierda de la Figura 7, con las correspondientes cadenas cinemáticas en la mitad derecha.

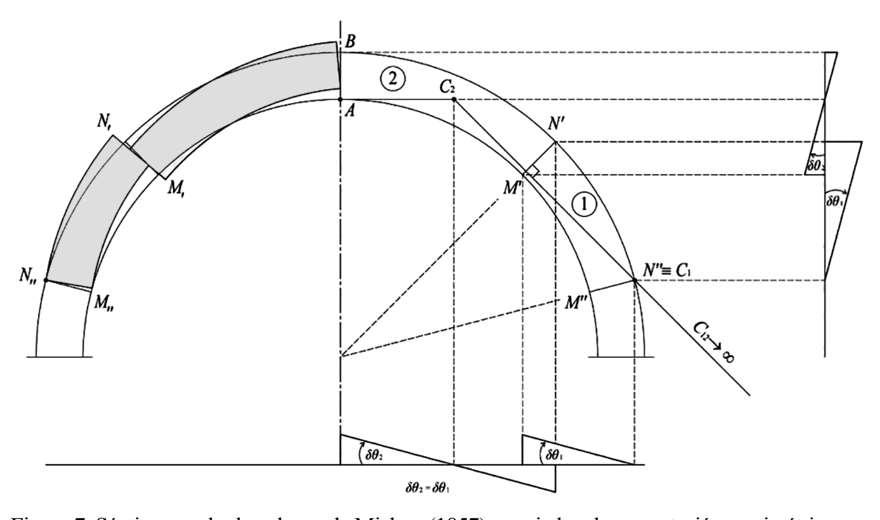


Figura 7. Séptimo modo de colapso de Michon (1857), asociado a la permutación no simétrica *rr*

Como se ve, el cuerpo inferior 1 gira hacia afuera alrededor de *N″* (N_{II} en la mitad izquierda), el superior 2 gira hacia adentro alrededor del intradós *A*, la junta *AB* de clave se abre al trasdós, la junta $M'N'$,en los riñones se cierra y sobre él solo se tiene traslación relativa. La condición de estabilidad correspondiente al impedimento de este mecanismo se convierte entonces en

$$\frac{M''Z''}{z''} - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0$$

Esta condición prevé que el empuje sea aplicado al intradós *A* de la clave y sus dos términos representan, respectivamente, el empuje horizontal para el equilibrio a la rotación hacia afuera alrededor del punto de trasdós *N″* de la junta *M″N″* y el empuje horizontal para el equilibrio al deslizamiento hacia adentro a lo largo de la junta *M'N'*, con la junta *M″N″* más baja de la junta *M'N'*. Esta condición no es otra que la quinta de las condiciones de estabilidad (R) dadas por el mismo Monasterio al final del capítulo tercero.

En resumen, no solo la permutación *rr* es admisible cinemáticamente, sino que da lugar a un movimiento mixto no simétrico y simétrico excluido a priori por Monasterio pero encontrado por él mismo incidentalmente en la quinta de las condiciones (R).

En cuanto al mecanismo que aquí se menciona como el séptimo modo de Michon, aparece, junto con el modo cuarto su opuesto, en la *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*, redactada en julio de 1857 como recopilación de las lecciones impartidas en la entonces École Impériale d'Application de l'Artillerie et du Génie de Metz (véase la Fig.6 en el artículo al que se refiere este Apéndice). Pero hay que decir que existe una edición anterior de la *Instruction* de Michon de noviembre de 1843 en la que el séptimo modo es el de La Hire y el cuarto su opuesto, es decir, las figuras 16 y 17 de la lámina 1 de Monasterio. Esta edición de 1843 es la que Saavedra ha traducido parcialmente al castellano y publicado en Madrid en 1860 con la adición de notas.

En busca de Joaquín Monasterio

Fernando Sáenz Ridruejo

Considero un acierto la idea, propuesta por Santiago Huerta y acogida con entusiasmo por la Escuela de Caminos, de editar el manuscrito «Nueva teórica del empuje de bóvedas», preparado por el profesor de la Escuela de Caminos y Canales Joaquín Monasterio.[1] Si el texto suscita muchas incógnitas, muchas más nos presenta la nebulosa peripecia biográfica del autor. Ante la imposibilidad de trazar una biografía de Monasterio, hemos preferido titular esta nota, más modestamente, «En busca…». Recordamos así el libro sobre Betancourt y Lanz en que José Antonio García-Diego reunió sus artículos sobre los dos maestros de Monasterio. Esperemos que esta búsqueda pueda fructificar algún día en un conocimiento tan preciso como el que hoy tenemos de estos dos personajes.

En lo que sigue haremos una breve referencia a la primitiva Escuela de Caminos, para pasar a continuación, a ocuparnos de lo poco que sabemos de Monasterio. Citaremos otros técnicos de ese apellido que tal vez puedan dar alguna pista adicional sobre nuestro hombre y dedicaremos algunas líneas a los dos ingenieros a través de los cuales el manuscrito ha llegado a nosotros: Francisco Travesedo y Eduardo Saavedra, que fue el depositario que, finalmente, lo entregó a la biblioteca de la Escuela. Como dejamos escrito en cierta ocasión, estos tres personajes, enlazados por un par de líneas autógrafas de Saavedra, representan la continuidad de la Escuela de Caminos, personificada en sendos profesores de sus tres épocas distintas.[2] Como complemento incluimos un informe grafológico realizado por doña Amparo Botella de Figueroa.

La Escuela de Caminos y Canales

La gestación de la Escuela de Caminos fue muy larga y laboriosa. Ya en 1785, Agustín de Betancourt, becario en París a la sazón, había propuesto la apertura de una Escuela semejante a la escuela francesa de *Ponts et Chaussées* y volvió a insistir en la idea en una memoria, escrita junto con Juan López de Peñalver y enviada desde la capital francesa al Conde de Floridablanca, en julio de 1791. La caída del Conde, junto a otros factores, impidió que esta propuesta pudiera llevarse a efecto y Betancourt hubo de esperar más de una década hasta que se presentó la ocasión propicia. En junio de 1799 se creó la Inspección General de Caminos y Canales y, a finales de 1801, pasó a dirigirla Betancourt, en calidad de Inspector.

El contacto con los contados técnicos de la Inspección, deficientemente formados, no hizo sino ratificar al inventor canario en la necesidad de disponer de un centro de enseñanza específica en que, por una parte, se impartieran las materias teóricas que en aquellos momentos se estaban desarrollando en Europa y, por otra, se profundizara en las disciplinas de tipo práctico, especialmente hidráulicas, en las que los diversos facultativos, incluidos los formados en la Real Academia de San Fernando, tenían muy escasa experiencia. La rotura de la presa de Puentes, ocurrida en Lorca, en abril de 1802, fue un factor determinante para la decisión política de crear la Escuela.

A propuesta del Inspector, en octubre de ese año, se decidió la apertura de unos Estudios en los que habrían de formarse los futuros facultativos de la Inspección. Esos Estudios, vinculados desde el primer momento al Real Gabinete de Máquinas, tuvieron distintas denominaciones oficiosas, como «Estudios de Hidráulica del Retiro», hasta que adoptaron el nombre oficial de Escuela de Caminos y Canales.

Tras unos exámenes de ingreso a los que se presentaron once candidatos, fueron admitidos siete. Dos de ellos renunciaron y con los cinco restantes se iniciaron las clases, en el Palacio del Buen Retiro de Madrid, el 19 de noviembre de aquel año. En los años sucesivos se siguieron efectuando exámenes, que estuvieron a cargo de Betancourt, acompañado por Juan López de Peñalver. En 1803 fueron admitidos tres alumnos y otros tres en 1804.

Se ha supuesto que tanto José Chaix –autor de unas *Instituciones de cálculo diferencial e integral*, publicadas por la Imprenta Real en 1801–, como López de Peñalver y el propio Betancourt pudieron impartir clases en aquel centro; pero lo cierto es que, al menos en un primer momento, el profesor que se responsabilizó de la enseñanza fue José María de Lanz y Zaldívar. Lanz (1764-1839) era un marino nacido en Campeche (Méjico) que se había distinguido por sus conocimientos matemáticos, habiendo sido colaborador de Vicente Tofiño en el «levantamiento de las cartas esféricas de las costas de España» y de José Mendoza y Ríos en su misión de estudio por diversos países europeos. En 1794 había sido dado de baja de la Armada y desde 1797 se encontraba en París dedicado al estudio. Desde allí fue hecho venir expresamente para profesar en la nueva Escuela.

El plan de enseñanza constaba de dos cursos, de cuyo contenido da cuenta Betancourt, en su famosa «Noticia del estado actual de los caminos y canales», de 28 de abril de 1803. En el primer año se explicaron Mecánica e Hidráulica, Geometría descriptiva y «el tratado de empuje de tierras y bóvedas» y se estaba dando «corte de piedras y enmaderaciones», es decir Estereotomía. Los alumnos hacían, además, ejercicios de construcción de arcos, dibujo, levantamiento de planos y nivelaciones. En el segundo curso habrían de explicarse las asignaturas de aplicación: conocimiento de materiales y sus mezclas, construcción de máquinas, formación de ataguías para cimentación de puentes, construcción de puentes de piedra, hierro y madera, lucha contra las inundaciones, conducción de aguas y obras de caminos y canales, tanto para riego como para navegación. Los meses de verano se ocuparían en la formación de proyectos de puentes.[3]

Betancourt se mostraba muy satisfecho de las enseñanzas de Lanz y del aprovechamiento de los alumnos: «Una aplicación tanto más laudable –dice– cuanto no tenemos ejemplo en ninguno de los establecimientos científicos de España… Consiguiente a esta perseverancia, al acertado método que usa el sabio profesor que los instruye y a la emulación que ha sabido infundirles, han sido los progresos que han hecho».

Sólo sabemos de dos libros de texto usados por estos alumnos, la *Geometría descriptiva* de Gaspard Monge y el *Tratado de Mecánica elemental* de L. B. Francoeur. Ambos fueron traducidos y editados por orden de Betancourt en 1803. Al parecer, la traducción del primero fue obra de Lanz, pero no nos consta quien

se ocupó de traducir el tratado de Francoeur. Tanto la venida de Lanz como la traducción de textos franceses son indicios de la voluntad de importar lo que en aquel momento estaba en vigor en Francia, alejándose de los métodos vigentes en España. Aportaremos otro dato, hasta ahora inédito.

Es sabido que, el 8 febrero de 1801, se había nombrado en la Real Academia de Bellas Artes «para el arreglo de la Sala de Geometría», una Junta presidida por el marqués de Espeja, de la que formaba parte Betancourt, encargada de revisar la enseñanza que se impartía desde que, tras la muerte de Benito Bails, se había hecho cargo de la misma Antonio Varas. No se ha publicado, en cambio, que dicha Junta, en reunión del día 18, acordó reeditar el tomo 1º de «la obra grande» de Bails e «instaurar el estudio de la Aritmética y la Geometría del modo más conforme a las intenciones antiguas de la Academia, continuadas en diferentes tiempos, siempre con el loable fin del mejor aprovechamiento de los jóvenes». El acta deja constancia de que «se conferenció maduramente», sin recoger las manifestaciones de cada uno de los asistentes; pero hemos de suponer la discrepancia del inventor canario, que en los meses siguientes se desentendió de la Academia. Como se ve, la solución que buscó para la enseñanza de la Geometría en la Escuela de Caminos se apartaba del texto de don Benito Bails, de las enseñanzas de don Antonio Varas y de las «intenciones antiguas».[4]

Al terminar el segundo curso, el 10 de agosto de 1804, los cinco alumnos de la primera promoción fueron nombrados Ayudantes terceros de la Inspección. Fueron, en el orden en que probablemente se los clasificó: Rafael Bauzá, Joaquín Monasterio, Antonio Gutiérrez, Julián Rodríguez y Gabriel Gómez Herrador. La única duda, que tal vez nunca se disipará, es si el segundo puesto lo ocupó Gutiérrez o, como creemos, Monasterio.

Posteriormente, en 1805, por la Inspección General de Caminos, se tradujeron dos memorias de Prony y otra de Bossut, sobre el equilibrio de las bóvedas, que se imprimieron conjuntamente y que también se utilizaron en la Escuela, para la enseñanza de las promociones siguientes.[5] Constituían, sin duda, el «tratado de empuje de tierras y bóvedas» a que se había referido Betancourt. Se ha conjeturado que existió una primera versión en español del *Essai sur la composition des machines*, de Betancourt y Lanz, que habría sido empleada por éste con fines docentes.[6] Teresa Sánchez Lázaro, por su parte, aceptando la hipótesis de que López de Peñalver

fue profesor de la Escuela, ha supuesto que utilizó para sus clases el *Tratado de Fortificación* de Muller, traducido por Sánchez Taramas.[7]

En julio de 1805, Lanz, que acababa de volver de una comisión en Alcántara, fue nombrado para marchar a París en la misión de Ciencias y Artes. En escrito del 14 de agosto, dirigido directamente al ministro, propuso que su ausencia fuera cubierta por Joaquín Monasterio y por un alumno de la siguiente promoción, José de Azas. Ante la oposición de Betancourt, partidario de que el suplente fuese Antonio Gutiérrez, que en aquel momento se encontraba siguiendo un curso en la Escuela Politécnica de París, el centro no abrió sus puertas hasta bien entrado 1806.[8] Es posible que, después de la marcha de Lanz y una vez sentado el principio de autoridad, Betancourt incorporase a la enseñanza a Joaquín Monasterio y, lo que es más dudoso, a Azas. Éste fue admitido como miembro del Cuerpo en octubre de 1805, con la categoría de Ayudante 3º y hasta diciembre de 1806 no fue destinado a La Carolina, en la carretera de Andalucía. Si dio clases durante el curso 1805-1806 no dejó constancia en su hoja de servicios.[9]

Previamente, siendo aún alumno, Julián Rodríguez había suplido una ausencia de Lanz, en 1804. Rodríguez anota en su hoja de servicios: «Por su aptitud fue después nombrado Profesor de dicha Escuela, por ausencia del catedrático D. José Lanz, Comisario de Caminos y Canales».[10]

Tras la marcha de Lanz, la Escuela languideció, mientras que la crisis política y económica, que obligó a postergar los planes de construcción de carreteras, supuso el declive de la Inspección. De los alumnos de la promoción de 1805, sólo Azas fue admitido en el Cuerpo de ingenieros de Caminos. Los otros dos, Manuel María de Chavarri y José Collar, quedaron, junto con los tres de la tercera (Juan Subercase, Joaquín Rillo y Domingo de Regoyos), en el Buen Retiro repasando los tratados y haciendo ejercicios prácticos, a las órdenes de Betancourt, y hasta abril de 1807 no consiguieron su ingreso en el Cuerpo. Pocos días después salió Betancourt de España.

Es verosímil que de la enseñanza teórica de la 4ª y la 5ª promoción, que deberían egresar en 1807 y 1808, respectivamente, se ocuparan los antiguos alumnos Monasterio y Gutiérrez. En cualquier caso, la marcha de Betancourt, primero, y la guerra de la Independencia, después, impidieron que esas promociones terminaran los estudios y fueran admitidas en la Inspección de Caminos. Sólo nos han

llegado los nombres de dos de sus alumnos: Francisco de Travesedo y un Chimioni, hijo posiblemente del ingeniero francés Luis Chimioni, que había colaborado con Pignatelli en el Canal Imperial.

Lanz no volvió a España hasta que lo hiciera en 1808, coincidiendo con la invasión napoleónica. El Buen Retiro fue invadido y devastado por las tropas francesas y la enseñanza en la Escuela quedó, naturalmente, interrumpida. No consta que el antiguo profesor hiciera nada para continuar con las clases.[11]

Joaquín Monasterio, «gran talento»

En el ministerio de Fomento no se conserva el expediente de Joaquín Monasterio, como no existen los de ninguno de los técnicos que, por expulsión, jubilación o fallecimiento, abandonaron la Inspección antes de que, en 1847, se formase el Ministerio de Comercio, Instrucción y Obras Públicas. Mientras no aparezca otra documentación, no sabremos nada sobre su nacimiento y su formación.

En la biblioteca de la Escuela de Caminos existe la referencia de un Juan Antonio Monasterio, autor de un manuscrito titulado «Exposición sobre la construcción de un camino desde Ribadesella a Castilla», fechado en 1784. Por la fecha, y dado el carácter gremial de la profesión, en que algunos facultativos de la Inspección eran hijos de constructores de caminos (caso de Larramendi o de los Echanove), bien pudiera tratarse del padre de Joaquín.[12]

El apellido Monasterio está instalado mayoritariamente en Vizcaya, por lo que podría suponerse que nuestro hombre procedía de esa provincia; pero, dada la movilidad geográfica de la clase funcionarial, civil y militar, de la que se nutrían los técnicos de la Inspección, nada permite asignarle un lugar de nacimiento concreto.

Respecto a la fecha de su venida al mundo, sólo podemos dar, a título indicativo, la de tres de sus compañeros de estudios. El primero de ellos, Rafael Bauzá era del año 1778. Gabriel Gómez Herrador y Julián Rodríguez, nacidos en 1775, ingresaron en la Escuela ya talludos, a los 27 años. Dados los conocimientos exigidos en el examen de ingreso, no podemos pensar que Monasterio fuera mucho más joven. Debemos asignarle un rango de fechas entre 1775 y 1780. Con poste-

rioridad a la redacción de estas notas Aigeru Zabala Uriarte, en su obra *Ingeniería e ingenieros en Bizkaia* (Bilbao, 2011) da noticia de un Joaquín María Monasterio nacido en Bilbao en 1783, aunque pone en duda que se trate de nuestro personaje.

No hemos encontrado su nombre en las relaciones de alumnos de los estudios de Vergara, ni en la Real Academia de Bellas Artes, ni entre los Guardiamarinas de San Fernando, que son algunos de los centros de los que se nutrió la Escuela. Cabe conjeturar que, al igual que Antonio Gutiérrez, se hubiera formado en los Reales Estudios de San Isidro.

Tampoco tenemos datos fidedignos sobre su salida del cuerpo de ingenieros de Caminos y su fallecimiento. Para hacernos una idea de su trayectoria en la profesión sólo disponemos de unas cuantas fotos fijas, empezando por los datos que proporcionan el expediente de Lanz y el manuscrito que ahora se edita, y siguiendo por otras noticias sueltas, que abarcan desde 1809 a 1826.

Ya hemos visto cómo Monasterio, alumno predilecto de Lanz, fue propuesto por éste, en agosto de 1805, para suplir su ausencia durante el curso 1805-1806. En su escrito del día 16, dirigido al ministro Cevallos, tras ponderar la conveniencia de que la enseñanza esté a cargo de los individuos salidos del propio Cuerpo, propone:

> Que se encargue al Ayudante tercero de la Inspección General de Caminos Don Joaquín Monasterio la segunda parte del curso que debe darse a los tres jóvenes que han concluido la primera parte; de la cual él mismo les ha instruido bajo mi inspección de un modo muy satisfactorio.

Es decir, ya en el curso 1804-1805 actuó como profesor ayudante de Lanz. Proponía Lanz, pensando tal vez en conservar su puesto, que la suplencia estuviera «limitada únicamente al curso que debe empezar en Noviembre y concluir a finales de Julio del año que viene, pues estos individuos [Monasterio y Azas] necesitan adquirir los conocimientos prácticos de que carecen y que son indispensables a cuantos deben componer el Cuerpo». Como hemos dicho, aunque Azas pasase a ejercer su profesión a finales de 1806, es muy probable que Monasterio continuara impartiendo clases en los cursos siguientes y que fuera profesor de Francisco Travesedo.

De 1809 y 1810 datan dos proyectos formulados por José María de Lanz para la administración josefista y que, como es natural, no llegaron a prosperar. Se trataba de crear una Academia Nacional de Ciencias y Letras y un Cuerpo de Ingenieros Civiles. A nuestros efectos sólo nos interesa consignar que a Monasterio le reservaba un puesto destacado en cada uno de estos organismos. En el proyecto de Academia, de 1809, se le destinaba a regentar la sección de Geometría de la División de Ciencias, a cuyo frente habría de estar Juan López de Peñalver. Es significativa la apostilla con que se le calificaba: «Don Joaquín Monasterio, ingeniero civil, gran talento».[13]

En el proyecto de un Cuerpo de Ingenieros Civiles, de 1810, se le proponía, junto con el marino Joaquín María Pery y con Antonio Gutiérrez, para Ingeniero de 1ª clase, por delante de los restantes ingenieros egresados de la Escuela.[14] Esta predilección por parte de Lanz nos hizo suponer, atribuyéndole cierta afinidad ideológica, que, al final de la guerra, Monasterio se había exiliado junto con su profesor. Ante la falta de noticias posteriores supusimos, además, que ese exilio habría sido definitivo y en nuestro error arrastramos a otros autores.[15]

En agosto de 1812, tras la batalla de los Arapiles, el rey José se replegó a Valencia acompañado por su gobierno, los miembros de su administración y una multitud de hasta 10.000 españoles del partido afrancesado. No tenemos constancia de que Monasterio se encontrase entre ellos. Sí aparece, en cambio, en una relación de los que en las postrimerías de la guerra trataron de pasar a Francia. Se trata del «Estado general de las personas que habiendo seguido el movimiento de los Ejércitos del Centro y de Mediodía, permanecieron en Zaragoza hasta su total evacuación», conservado entre los vulgarmente conocidos como «Papeles Secretos de Fernando VII».[16] Allí aparecen, dentro del apartado «Personas que pertenecen a diferentes ramos y establecimientos», Rafael Bausa (sic) y Joaquín Monasterios (sic), con el «empleo o dignidad» de Ingenieros de Caminos.

Es, por lo tanto, muy probable que Bauzá y Monasterio pasasen a Francia; pero la marcha de este último, como veremos no fue definitiva. En los años siguientes a la guerra encontramos algunas noticias de sus compañeros, pero no hay ninguna suya. En 1814, tras sustanciarse el proceso de depuración de los

facultativos de la Inspección, se deciden los destinos de Azas, Collar y Subercase; pero no se hace mención de Monasterio. En el caso de Juan Subercase se anota: «su purificación en 1814 en el expediente de D. Antonio Gutiérrez», cuando cabe pensar que, de haber estado incluido Monasterio, hubiera sido éste quien encabezase la lista. En el expediente de Julián Rodríguez aparece una orden, dada en febrero de 1816, para que junto con Gutiérrez se persone todas las mañanas en las oficinas de la Contaduría «a despachar los asuntos que se les encarguen». A Monasterio no se le menciona; no estaba en Madrid y, posiblemente, tampoco se encontraba en España.

Pero volvemos a encontrarle en enero de 1817, en un escalafón de los empleados facultativos del ramo de Caminos y Canales.[17] Y no parece que hubiera tenido dificultades para justificar su conducta cerca de los franceses. Sería interesante comprobar qué apoyos encontró en la cambiante camarilla del monarca, pues, lejos de ser castigado, se le pasó a una categoría superior. En ese escalafón, aparece, con residencia en Madrid, como único Ayudante segundo, con un sueldo de 12.000 reales anuales. Figura con la siguiente nota: «ascendió de tercero». Detrás, encabezados por Gutiérrez, aparecen, con categoría de Ayudantes terceros, sus restantes compañeros de promoción, con la excepción de Bauzá que había marchado a Rusia para reunirse con Betancourt. Los ingenieros salidos de la Escuela en las siguientes promociones figuran a continuación, excepto Joaquín Rillo, que, habiendo colaborado con José María de Lanz en Córdoba, se exilió verosímilmente con él.

Con la misma categoría de Ayudante segundo encontramos a Joaquín Monasterio en otro escalafón similar, de 1819, en que no aparece Antonio Gutiérrez. Como únicas diferencias de interés, cabe consignar que su sueldo había pasado a ser de 15.000 reales y que no figura su destino.[18] En cualquier caso, es evidente que nuestro hombre no sólo no fue perseguido por afrancesado, sino que durante el sexenio absolutista progresó por delante de todos sus compañeros.

La única noticia que tenemos de Monasterio durante el Trienio Constitucional es muy curiosa. Se trata de una «cuestación patriótica» a la que, en marzo de 1823, contribuyen todos los empleados del ramo destinados en Madrid para equipar a los 774 soldados reclutados en la provincia y a las recién creadas compañías de cazadores constitucionales.[19] Allí, encabezados por Larramendi, que con-

tribuye con 160 reales, y por los Comisarios de Caminos, que lo hacen con 40 reales, aparecen primero los Ayudantes y luego los Conservadores de los Reales Sitios y el Conserje, que aportan, todos ellos, 20 reales. En esta relación Monasterio figura a la cola de todos los Ayudantes, detrás incluso del recién incorporado Francisco Travesedo. Aunque esta relación no es un estadillo oficial, en general todos los facultativos aparecen por riguroso orden de escalafón. No parece, por lo tanto, que nuestro hombre medrara durante ese periodo. Por el contrario, esta relación hace pensar que fue preterido.

Otra cuestión es cuál pudo ser su función durante este periodo. Rumeu de Armas ha conjeturado que Monasterio pudo ser profesor de la Escuela de Caminos en su efímera segunda época, de 1821 a 1823.[20] Cabe esa posibilidad, aunque no tenemos ningún dato que la confirme. Otros presuntos profesores, sugeridos por Rumeu, serían López de Peñalver, Gutiérrez y José de Azas. Es probable que lo fuera el segundo, que había sido miembro de la Comisión por cuyo consejo se reabrió el centro y que tuvo una larga actividad docente en el Real Conservatorio de Artes. Azas no lo fue. Documentalmente sólo sabemos que el centro estuvo dirigido por Francisco Javier Barra y que allí profesó Travesedo.

Reprobación, y desaparición, de Monasterio

Lo anterior no fue óbice para que, pocas semanas después, tras la vuelta al régimen absolutista, fuera sometido al mismo proceso depurador que todos sus compañeros. El 27 de junio de aquel año, por Decreto de la Regencia del Reino, se creó la Junta de purificaciones de empleados civiles, que empezó a funcionar el día 29. Debían someterse «voluntariamente» a justificar su actuación todos los empleados que no hubieran sido separados del servicio por el gobierno constitucional y que durante el trienio hubieran obtenido ascensos en sus escalas. En caso contrario, quedarían suspensos de sueldo.

La Junta funcionó hasta el 26 de octubre de aquel año, en que fue suprimida por Decreto real. Durante esos cuatro meses, aprobó a un total de 693 empleados civiles, que pudieron reintegrarse en sus puestos, y reprobó a un número sensiblemente mayor. Entre los aprobados de la primera hora sólo figuran dos miem-

bros de la Inspección general de Caminos, el Ayudante Mateo del Castillo (el 29 de agosto) y el Comisario Manuel Martín Rodríguez (el 23 de septiembre).

El 1 de abril de 1824 decidió Fernando VII que continuasen las depuraciones. Creó una nueva Junta y determinó que los que fuesen reprobados en 1ª instancia podrían hacer las alegaciones que considerasen oportunas. No sabemos cuando presentó su instancia Monasterio ni que informaciones aportó, pero en el «Libro de Registro general de los expedientes que se despachan por la Junta de purificaciones de empleados civiles» consta que, el 28 de octubre de 1824, se decide la reprobación en 1ª instancia de «D. Joaquín Monasterio, Ayudante 2º de Ingeniero de Caminos», que figura con el expediente de depuración número 1.219. Ese mismo día reciben idéntica resolución otros ocho empleados públicos entre los que figura Antonio Bolaños, «Ingeniero Ayudante 1º de Caminos y Canales del Reyno».[21]

Antes de esa fecha habían sido igualmente reprobados Francisco Javier Van Baumberghen, Manuel María de Chavarri, Francisco Javier Mariategui y otros facultativos de la Inspección. José Agustín de Larramendi lo fue dos veces, la primera el 22 de junio y la segunda el 28 de diciembre de 1824. Como excepción, el 2 de noviembre de ese año, se decidió la aprobación de Manuel de Ynza, Ayudante encargado del detall de las obras del Real Canal de Manzanares, que hizo el número 694 de los aprobados en la segunda época. En total, en 1824 se aprobaron los expedientes de 886 individuos, siendo más los reprobados.

Durante el año 1825 y durante los años siguientes, hasta 1832, continuó la Comisión purificadora examinando las sucesivas instancias de los distintos funcionarios o pensionistas. En 1825 fueron resueltos favorablemente otros 953 expedientes y entre 1826 y 1827 se aprobó a otros 645. A partir de determinado momento, las calificaciones de «aprobado» y “reprobado” alternaron con las de «purificado» e «impurificado», situación ésta ya, al parecer, irreversible. En los años siguientes continuó el incesante goteo de aprobados y reprobados: en 1828 se aprobó a 139, en 1829 a 162, en 1830 a 170 y en 1831 a 51. Finalmente, aún se aprobó a otros 3 antes del cierre de la Junta, que tuvo lugar el 24 de enero de 1832.

Algunos ingenieros de la Inspección obtuvieron la purificación en ese periodo: Antonio Gutiérrez, que figura como «Ayudante 3º de Ingenieros de Caminos y Canales y Catedrático de matemáticas de la Casa de Caballeros Pajes de S.

M.», en 2ª instancia, el 3 de marzo de 1825; el Comisario Francisco Javier Van Baumberghen, el 2 de enero de 1826, y Tadeo Jesús de la Plaza, el 24 de octubre de 1827, ambos en 2ª instancia. El 1 de mayo fue aprobado en 1ª instancia Scipión Perosini, Director del Real Canal del Guadalquivir. Manuel María de Chavarri, obtuvo la aprobación, en 3ª instancia, el 4 de julio de 1829 y Diego del Castillo, también en 3ª, el 17 de diciembre de ese año. El antiguo empleado de la Inspección Vicente Vázquez del Viso, ahora tesorero jubilado de Loterías, fue aprobado en 3ª instancia, en julio de 1828. Larramendi fue reintegrado a su condición anterior el 5 noviembre de 1826 por decisión regia; pero en el libro de registro no aparece ninguna nueva resolución sobre su expediente.[22]

El último de los ingenieros de Caminos aprobados fue Domingo de Regoyos, padre del arquitecto y ayudante de Obras Públicas Darío de Regoyos y abuelo del pintor de este nombre, que obtuvo su purificación, también en 3ª instancia, el 14 de abril de 1831. Debajo de su nombre aparece esta anotación: «fue miliciano». Hay que señalar que, aunque en el libro no aparecen las dos primeras reprobaciones de Regoyos, sabemos que, tal vez por su condición de miliciano nacional, en 1825 había sido impurificado y en su lugar se admitió en el Cuerpo al teniente coronel de Artillería, natural de Vigo, Pelayo Correa y Enríquez (circa 1775-1857). Más adelante tendremos ocasión de referirnos a este personaje.

Acabado el proceso, se quemaron los expedientes por lo que no nos es posible conocer las razones de unas u otras decisiones, en las que parece hubo un gran margen de arbitrariedad, pues, en definitiva, dependían de la variable voluntad del monarca. Algunos de los aprobados lo fueron directamente por decisión real, a pesar de que la Junta consignara, junto a la resolución favorable, las que se supone eran las mayores pruebas de carga: su condición de milicianos nacionales o su marcha a Cádiz con el gobierno constitucional.

Joaquín Monasterio presentó una 2ª instancia que no surtió efecto. Fue impurificado el 2 de diciembre de 1826. A partir de ahí nada. Esa es la última noticia que tenemos de su existencia. No hemos encontrado una posterior resolución y hemos de suponer que falleció antes de que, tras la muerte de Fernando VII, llegara el momento de su rehabilitación. Cabría la posibilidad de que se exilase o de que hubiera encontrado acomodo en otro organismo, desistiendo de su condición de ingeniero de la Inspección; pero en tal caso habrían quedado vestigios de su

actividad posterior. Fue el caso de Mariategui, que, impurificado, entró en el Ayuntamiento de Madrid en calidad de arquitecto mayor.

Hay, en cualquier caso, una fecha «ante quem» para el fallecimiento de nuestro ingeniero. En 1837, Godoy escribe en sus *Memorias críticas y apologéticas*: «Monasterio también ha muerto. Azas ignoro si existe».[23] Esta frase hace pensar, además, que el fallecimiento pudo producirse fuera de España, puesto que el Príncipe de la Paz, en el exilio, tenía más conocimiento de la suerte de Monasterio que de la de José de Azas, quien en esa fecha vivía en Madrid. La cita, hecha casi treinta años después del cierre de la Escuela, es indicio de la relevancia que ambos tenían en el recuerdo de Godoy.

Otros Monasterio

En un afán por obtener noticias adicionales sobre nuestro ingeniero hemos seguido la pista infructuosamente a todos los «Monasterio» que, relacionados de una u otra forma con las obras públicas aparecen en los años posteriores a los de su florecimiento. En el libro de registro citado aparece un tal Juan Miguel Monasterio, «Practicante que fue de la Cirugía en la Guerra de la Independencia», que fue impurificado el 28 de marzo de 1831. Desconocemos su posible parentesco con nuestro personaje, al que, aparte del apellido, le unía la condición de «impuro».

En algunos casos, como el del Ayudante de Caminos Pedro Albrador, fallecido antes de 1834, al no poder rehabilitar al difunto, se dio un empleo de celador a algún hijo. Hemos rastreado, en el archivo del ministerio de Fomento, los dos «Monasterio» de los que existe algún expediente personal y tampoco hemos obtenido nada por este camino, pues se trata de personajes bastantes más tardíos.[24] Es posible que, a pesar de la distancia temporal, tengan algún parentesco con nuestro hombre, pero sus escuetos expedientes no suministran ninguna noticia de interés.

En la biblioteca de la Escuela de Caminos hay referencia de otros dos «Monasterio». Uno, Mariano Monasterio Arenal, es autor de un *Anuario de la Construcción*, que tuvo gran aceptación en su época y del que se hicieron varias ediciones entre 1865 y 1897. Trabajó en la construcción de los ferrocarriles de Sevilla a Jerez y de Córdoba a Málaga y, posteriormente, se trasladó a Madrid

para trabajar en las obras del ensanche, en el barrio de Salamanca, en el que intervino en 50 edificios y en un barrio de hotelitos junto a la Castellana, en que hizo su propio chalet. En 1879 fue nombrado, a título honorífico, Jefe Superior de Administración del Ministerio de Fomento, con cuyo motivo la *Revista de Obras Públicas* hizo una reseña muy elogiosa que pudiera hacer pensar alguna relación familiar con la Escuela o el cuerpo de Caminos.[25] Sin embargo, nuestro hombre, nacido en 1827 en Villafranca (Navarra), era hijo de un teniente liberal del mismo nombre que murió en aquel pueblo, fusilado por las tropas carlistas, y su vinculación con el mundo de la construcción le venía por un tío aparejador del Patrimonio, de nombre Saturnino, que le acogió en Madrid en 1845.[26]

Otro técnico notable de este apellido fue José de Monasterio y Correa, ingeniero de Minas y director de la Escuela de ese cuerpo entre 1864 y 1874. Tras cursar en las Escuelas Pías y en San Isidro había ingresado en la Escuela de Minas en 1837. Al terminar los estudios pasó como ingeniero a Almadén y, luego, a Murcia y a Almería. En la legislatura de 1872-1873, fue senador por esta última provincia. Murió en Almadén, donde había acudido como Inspector, asesinado junto al ingeniero Buceta, por los mineros amotinados el 5 de julio de 1874.[27] Había nacido en Madrid en 1819 y, si hemos de creer a su biógrafo López Azcona, era «hijo de un noble castellano» y su madre «descendiente de la noble familia gallega Correa que pasó a las villas de Pinto y Valdemoro». Se trasladó después la familia a Valladolid, donde en 1823 nació un hermano, Raimundo, que habría de ser doctor en Medicina y catedrático de clínica en el colegio de San Carlos de Madrid.[28]

José Monasterio tuvo una relación tan estrecha con el Cuerpo de Caminos que cabe conjeturar un posible parentesco con Joaquín Monasterio y con aquel Pelayo Correa que reemplazó a Regoyos. De hecho, a su muerte, fue la Junta Consultiva de Caminos, Canales y Puertos la que gestionó cerca del ministro de Fomento una pensión para su viuda. Entre 1857 y 1860, Monasterio había colaborado varías veces en la *Revista de Obras Públicas* y no es casualidad que por esas fechas la dirigiera Víctor Martí, yerno de Pelayo Correa.[29] En 1865, en reunión celebrada en los locales de la *Revista*, Monasterio fue propuesto, junto con Lucio del Valle, para ocupar una de las vicepresidencias de un Instituto de Ingenieros Civiles, que entonces no llegó a cuajar. En fecha posterior informó, junto con Rogelio de Inchaurrandieta, sobre las condiciones geológicas del pantano del Vi-

llar, para el Canal de Isabel II.[30] En la biblioteca de la Escuela de Caminos se conservaba su *Memoria presentada al Excmo. Sr. Ministro de Hacienda sobre el ensayo de destilación del mercurio…*, que data de 1869.[31]

En definitiva, no podemos descartar el parentesco de Joaquín y José Monasterio. Si Joaquín fuera ese «noble castellano» a que, enfáticamente, se refiere López Azcona, tendría sentido que en 1823, después suspendido de sueldo, se hubiera retirado a Valladolid, donde nació Raimundo. Sería una situación similar a la de otros, como Juan Subercase, acogido al hogar familiar en Valencia, o Chavarri que marchó a su Navarra natal. Un posible exilio después de 1826, no resulta incompatible con las inconcretas noticias que tenemos acerca de la infancia de José. La profesión de Raimundo enlaza, por otra parte, con aquel Juan Miguel, practicante de la cirugía, impurificado en 1831.

Algunas conjeturas sobre el manuscrito

La primera pregunta que nos debemos plantear es si el manuscrito está escrito por el propio Monasterio y la respuesta debe ser afirmativa. Sus trazos decididos no son los propios de un copista. Tampoco puede pensarse que sea una copia realizada por Francisco Travesedo. Su densidad y acabado no corresponden a unas notas tomadas en clase y basta cotejar la letra del manuscrito con la de Travesedo para desechar esa hipótesis. Lo que hemos de señalar es que el manuscrito está redactado en correcto castellano, cuando lo frecuente es que los textos técnicos y científicos de la época estén cuajados de galicismos.

La siguiente interrogante es la relativa a la fecha de su redacción; cabe que lo redactase durante su etapa escolar, posteriormente, siendo ya ingeniero y profesor o, incluso, en época más tardía, ya que su relación con Travesedo se prolongó al menos hasta 1823. Para analizar esta cuestión resulta conveniente indagar cuales fueron sus fuentes. Como queda dicho, la memoria sobre el equilibrio de las bóvedas de Charles Bossut no se imprimió hasta 1805, pero ya antes, en el curso 1802-1803 había explicado Lanz esta materia, verosímilmente sobre la base del original francés. Sin entrar en el fondo de los argumentos técnicos de la memoria y del manuscrito, podemos cotejar la lista de los autores citados por uno y otro.

Memoria sobre el equilibrio de las bóvedas, de Bossut: Aespino (1755), Bernoulli, Juan y Santiago (1691), Bossut (1770, 1774 y 1776), Bouguer (1734), Coulomb, (1773), Couplet (1729 y 1730), Cramer (editor de Santiago Bernoulli), Gregori y David (1707), Huygens, La Hire (1695, 1712), Leibnitz, Mascheroni (1785), Parent (1704), Rondelet (1797), Soufflot (arquitecto muerto en 1780), Vitrubio.

Manuscrito de Monasterio: Bossut, Bouguer, Coulomb, Couplet, La Hire, Perronet, Prony, Rondelet, Taramas.

Todos los autores que aparecen citados en el texto de Monasterio fueron citados también por Bossut, a excepción de Perronet, Prony y Sánchez Taramas. Perronet era más un ingeniero constructor que un tratadista, pero su labor era bien conocida de los alumnos de la Escuela en cuya biblioteca tenían su obra sobre el puente de Neuilly; Prony era el autor de las dos memorias que se estudiaban, y que se imprimirían, junto a las de Bossut. A Sánchez Taramas no había razón para que Bossut lo citase, pero en cambio era bien conocido en España como traductor del tratado de Muller.

En definitiva, todo parece indicar que Monasterio tuvo como referencia, aunque fuese para enfocar la cuestión de un modo distinto, la obra de Bossut sobre el equilibrio de las bóvedas. Creemos, por lo tanto, que redactó el texto durante su permanencia en la Escuela. Pudo hacerlo siendo alumno, entre 1803 y agosto de 1804, o después, como profesor, antes del cierre de la Escuela en 1808. En una redacción posterior hubiera citado otras obras posteriores a esa fecha.

Menos importancia tiene la cuestión de cuándo pasó el manuscrito de Monasterio a manos de Travesedo. Es posible que se lo entregase en el curso 1806-1807, en que el primero sería profesor del segundo, pero resulta más plausible que lo hiciera con posterioridad, tal vez durante el trienio constitucional, cuando ambos coincidieron en el Cuerpo de Caminos y, verosímilmente, en la Escuela.

El carácter de Monasterio

Ante la escasez de los datos que hemos podido acopiar, nos ha parecido conveniente averiguar lo que la propia escritura pudiera traslucir. Hemos consultado para ello a una de las figuras más relevantes de la Grafología pericial es-

pañola, doña Amparo Botella de Figueroa. En un anejo al final de este trabajo incluimos su informe, que describe a Monasterio como una persona de mente original y penetrante, con espíritu investigador y ordenado, que trata de sobresalir y brillar en la sociedad y que es tenaz en la consecución de sus objetivos; pero en el que observa un carácter menos afirmado de lo que quisiera, y sin la necesaria capacidad de convicción. Termina definiéndole, creemos que muy acertadamente, como un hombre más de pensamiento que de acción. El estilo, «algo engolado», que detecta puede encajar bien en el «noble castellano» a que hemos hecho referencia.

Francisco Travesedo y Eduardo Saavedra

Sobre Francisco Travesedo (Madrid, 1786-1861) escribió Eduardo Saavedra una excelente necrología, en la que conjuga la admiración y la simpatía, con una gran profusión de datos precisos.[32] Antes de cumplir los 19 años, en 1805 sacó por oposición una cátedra de matemáticas en la Real Casa de Caballeros Pajes, pero no se la dieron por falta de edad. Ese mismo año ingresó en la Escuela de Caminos y Canales, en la que debería haber terminado la carrera en julio de 1808; pero, a causa de la guerra de la Independencia, quedaron interrumpidos los estudios. A partir de 1812, puso en su casa una academia para preparación del ingreso en las escuelas militares y tradujo uno de los libros más de moda en la época, el Lacroix. En 1821 fue incorporado al cuerpo de Ingenieros de Caminos y nombrado, además, profesor de la Escuela. Ya le hemos visto en la lista de facultativos de la Inspección, en marzo de 1823.

En ese mismo año, fue, como todos los ingenieros de Caminos, impurificado y ya no quiso reincorporarse cuando más tarde tuvo ocasión, después de la muerte de Fernando VII. Fue nombrado miembro fundador de la Real Academia de Ciencias en 1847 y desempeñó gran cantidad de cargos académicos, siendo, por ejemplo, en 1848, miembro de los tribunales para ingreso en la Escuela preparatoria y de los encargados de admitir a los Directores de Caminos Vecinales. Patrocinó, no siempre con éxito, la entrada de varios candidatos en la Academia. Adjunto reproducimos un fragmento de su propuesta a favor de don Juan Cortá-

zar, en la que se puede observar su enérgica caligrafía, muy distinta de la del manuscrito de Monasterio.[33]

Firma de Travesedo

Respecto a Saavedra (1829-1912) se plantean dos cuestiones menores en relación con éste manuscrito. Una es cuándo lo recibió de manos de Travesedo y otra, cuándo lo entregó a la biblioteca de la Escuela. Su posible interés radica en saber si lo utilizó en sus enseñanzas y qué difusión posterior pudo tener entre los alumnos de la Escuela. Saavedra se ocupó de esta cuestión al menos en dos escritos de 1860, un artículo en la *Revista de Obras Públicas*, «Nota sobre la determinación del problema del equilibrio de las bóvedas» y la traducción de la *Instrucción sobre la estabilidad de las construcciones* de Michon. No parece que sus planteamientos coincidan con los del manuscrito, por lo que nos decantamos por la idea de que o Travesedo se lo entregó, poco antes de morir, a raíz de la aparición de estos escritos, o que fueron los herederos de éste quienes se lo donaron.

Se replantea además otra cuestión, no resuelta ni abordada, acerca de la relación discipular de Saavedra respecto a Travesedo. En sus líneas al frente del manuscrito, igual que hiciera en la necrología citada, lo califica como su maestro; pero ni José Mañas ni ningún otro autor se han referido a esa relación que, lógicamente, se tuvo que producir en 1846, en la academia de Travesedo, en la que es de suponer que Saavedra se prepararía para ingresar en la Escuela. No llegaron luego a coincidir en la Academia de Ciencias en la que el discípulo entró en 1869, bastante después de la muerte del maestro.

El manuscrito no aparece citado en ninguno de los catálogos de la biblioteca de la Escuela de 1859 y 1875, ni en los suplementos de 1883 y 1896. Sí aparece, en cambio, en el *Diccionario general* de Pelayo Clairac, entre la bibliografía del artículo «bóvedas», incluida en el primer tomo, que data de 1877. Se especifica

allí que estaba en la biblioteca de don Eduardo Saavedra. Clairac (1839-1891), que terminó los estudios en 1863, fue, además de alumno, pariente de Saavedra, quien le enseñaría el texto en su propia casa. Los primeros inventarios en que se menciona son el suplemento de 1905 y el catálogo de 1912. Es decir, Saavedra lo donaría a la Escuela a finales del siglo XIX o principios del XX, cuando, después de muchos años en que estuvo distanciado de la profesión, entró en la Junta Consultiva y volvió a colaborar con la *Revista de Obras Públicas*.

Las tres líneas de la nota de Saavedra son similares a las de otros escritos de Saavedra en su madurez, aunque muy distintas a los que conocemos de su vejez en que con la ceguera se le estropeó y miniaturizó la escritura.[34]

Anejo. Breve perfil grafológico de un matemático del s. XIX

Una persona de mente original y penetrante que aborda la realidad con espíritu investigador, curiosidad, y orden. Se expresa con argumentos claros, justificados, racionales, que generan credibilidad pese a un estilo algo engolado de comunicación. Es rápido y certero en sus juicios, abierto al cambio y con cierta visión de futuro.

Con voluntad de desmarcarse de lo común y afirmar su individualidad, esta persona se comporta con seriedad y control pero a la vez trata de sobresalir y de tener brillo social. Controla sus gestos, cuida sus modales, y acata el orden establecido aunque se le ve con un punto de resquemor. En el fondo, la personalidad está menos afirmada de lo que quisiera, lo que le lleva a carecer de impacto de convicción en lo inmediato, y eso le genera cierto inconfort interior que compensa profundizando en sus conocimientos, asumiendo riesgos controlados, y adoptando conductas que pueden ser vistas como arrogantes por los demás.

Tenaz, luchador y estable en la consecución de sus objetivos, con capacidad para remontar la adversidad y la dificultad, e incluso el cansancio, es más un hombre de pensamiento que de acción.

Madrid, julio de 2009
Amparo Botella de Figueroa
Grafóloga-Consultora (SFDG-GGCF)

Conclusión

Es muy poca la luz que hemos podido aportar sobre la biografía y la personalidad de Joaquín Monasterio. Sólo nos quedar esperar que la publicación del manuscrito atraiga el interés sobre su figura de otros investigadores más afortunados, que rectifiquen o ratifiquen las hipótesis que aquí dejamos apuntadas.

Notas

1. García-Diego, José A. *En busca de Betancourt y Lanz*. Madrid: Editorial Castalia, 1985.
2. Sáenz Ridruejo, Fernando, *Una historia de la Escuela de Caminos. La Escuela de Caminos de Madrid a través de sus protagonistas (I parte 1802-1898)*. Madrid: Ministerio de Fomento, Fundación Agustín de Betancourt, 2005, 44.
3. Puede verse en *Revista de Obras Públicas*, 1869, pp. 71 y 115.
4. Archivo de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, legajo 1-31-9. Los miembros de la Junta eran: el marqués de Espeja (consiliario), Betancourt, Ortiz, Diezma, Arnal, Casanova, Varas y el secretario Isidoro Bosarte.
5. Prony, R., *Memorias sobre el empuje de las tierras* y *Método práctico para determinar las dimensiones de los muros de revestimiento*; Bossut, Carlos, *Sobre el equilibrio de las bóvedas*, traducidas para el uso de los Estudios de la Inspección General de Caminos. Madrid: Imprenta Real, 1805.
6. Lucena Giraldo, Manuel. *Historia de un cosmopolita. José María de Lanz y la fundación de la Ingeniería de Caminos en España y en América*. Madrid, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2005, 121.
7. Sánchez Lázaro, Teresa, «El manual reciclado», *JAFO. Homenaje a José Antonio Fernández Ordóñez*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2001, 351–356.
8. Archivo de la Marina en El Viso del Marqués. Guardiamarinas, caja 66, nº 1690, Expediente personal de Lanz. Puede verse en J. Rempujo, «El primer director que tuvo la Escuela de Caminos fue un teniente de navío», *Revista general de Marina*, tomo 154. Madrid: 1958 (reproducido en *Revista de Obras Públicas*, agosto 1958, 484–488) y en Antonio Rumeu de Armas, *El científico mejicano José María de Lanz, fundador de la cinemática Industrial*. Madrid: Instituto de España, 1983.
9. AMF, legajo 6121, Expediente personal de José de Azas y Llanderal-Valdés.
10. AMF, legajo 6209, Expediente personal de Manuel María de Chavarri. Algunos autores, teniendo en cuenta solamente la fecha de 1807, han supuesto que estos alumnos pertenecían a la 4ª promoción, cuando realmente procedían unos de la 2ª y los restantes de la 3ª. Sobre este asunto, véase Sáenz Ridruejo, Fernando, «Las últimas disposiciones de Betancourt en España», *Anuario de Estudios Atlánticos*, 1986, nº 32, 195–209.

11. Es casi un lugar común la idea de que Fernando VII suprimió la Escuela en 1814; realmente se limitó a no reanudar la enseñanza interrumpida en 1808.
12. *Catálogo de la Biblioteca de la Escuela Especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*. Madrid: Imprenta, Fundición y Estereotipia de D. Juan Aguado, 1875. Agradecemos la información facilitada por la bibliotecaria de la Escuela, Conchita García Viñuelas, para la consulta de los diversos catálogos.
13. Rumeu de Armas, Antonio, *El científico mejicano José María de Lanz, fundador de la Cinemática Industrial*. Madrid: Instituto de España, 1983.
14. Bertomeu, J. R. y Ten Ros, A., *Simposio Agustín de Betancourt*, El Puerto de la Cruz, 1991, 79
15. En *Ingenieros de Caminos del siglo XIX*, página 363, dimos por hecho que se exilió y fue separado definitivamente del Cuerpo, y este error nuestro arrastró a otros autores como Santiago Huerta o Manuel Lucena.
16. Archivo de Patrimonio Nacional, *Papeles reservados…*, tomo 10. Debemos esta noticia a Carlos Domínguez López.
17. Blanco Mozo, José Luis, «Mateo del Castillo (ca. 1771–1836). Ingeniero de la Inspección General de Caminos y Canales», *Revista de Obras Públicas*, septiembre 2003, 48. Estado, Archivo Histórico Nacional, legajo 8373. «Razón de los empleados facultativos del ramo de caminos con expresión de los sueldos que gozan, años de servicio y destinos (15–1–1817)».
18. Idem., 49. Estado, Archivo Histórico Nacional, legajo 8373. «Razón de los empleados facultativos del ramo de caminos con expresión de los sueldos que gozan, años de servicio y destinos (1819)».
19. Gentil Baldrich, José María, «La Dirección General de Caminos y otros personajes en 1823», *Revista de Obras Públicas*, mayo 1997, 63. Relación publicada en *El Universal*, 13 de marzo de 1823.
20. Rumeu de Armas, Antonio. *Ciencia y tecnología en la España ilustrada*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1980, p. 395.
21. Archivo Histórico Nacional Consejos, libro 1747, folio 96 vuelto. De este proceso depurador dimos noticias, junto con Carlos Domínguez López, en *José Agustín de Larramendi, primer ingeniero de Caminos*, Bilbao, 1999.
22. Domínguez y Sáenz, op. cit., página 100.
23. Rumeu de Armas, op. cit., 395, nota 40.
24. Uno es un Urbano Monasterio (legajo 6445), que fue admitido como escribano temporero por recomendación ministerial en 1882, y otro un Joaquín Álvarez Monasterio (legajo 6099) que en 1921 hizo una instancia para ser admitido a las oposiciones a Interventor del Estado en los Ferrocarriles.
25. *Revista de Obras Públicas*, 1879, p. 116.
26. Martínez Ginesta, Miguel, *Biografía del Ilmo. Sr. D. Mariano Monasterio y Arenal, constructor de obras*. Madrid: Imprenta de Miguel Ginesta, 1880.
27. *Ilustración Española y Americana*, 1874, nº 26 de 15 de julio, 401–402.

28. López Azcona, Juan Manuel, «Mineros destacados del siglo XIX. José Monasterio Correa e Isidro Sebastián Buceta», *Boletín del Instituto Geológico y Minero*, Mayo-Junio 1987, pp. 128–135.
29. «Telegrafía eléctrica», *Revista de Obras Públicas*, 1857, 139-140; «El norte verdadero y el norte magnético», *Revista de Obras Públicas*, 1858, pp. 82, 93-95, 102-105 y 116–118; «Sobre el eclipse de sol del 18 de julio de 1860», *Revista de Obras Públicas*, 1860, 173–177.
30. Sáenz Ridruejo, Fernando, *Ingenieros de Caminos del siglo XIX*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1990, 329.
31. *Catálogo de la Biblioteca…*, 405–406.
32. Saavedra, Eduardo, «Travesedo», *Revista de Obras Públicas*, 1861, 86–88.
33. Agradecemos la ayuda de la secretaría de la Academia y su autorización para la reproducción del texto.
34. Ver, por ejemplo, Mañas Martínez, José, *Eduardo Saavedra, ingeniero y humanista*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, ediciones Turner, 1983. 5ª lámina, entre páginas 352 y 353.

Aportación de Joaquín Monasterio a la teoría de arcos rígidos

Avelino Samartin

El presente libro contiene el manuscrito de Joaquín Monasterio, profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid en los años turbulentos inmediatamente anteriores a nuestra guerra de la Independencia, según reza la nota del insigne ingeniero Eduardo Saavedra, quien en la primera página de dicho manuscrito escribe: «Este trabajo es de un profesor de la primitiva Escuela de Caminos llamado Monasterio, y me lo regaló mi maestro Don Francisco de Travesedo». Por ello, sin duda alguna es profundamente emotivo para mí, como Profesor Titular de Puentes de Fábrica y posteriormente Catedrático de Resistencia de Materiales de la misma Escuela, recibir de su Director el encargo de participar en el presente libro. Las inevitables diferencias en conocimientos y técnicas, causadas por la distancia de más de dos siglos entre la redacción del trabajo de Monasterio y estas líneas de introducción, se amortiguan por la simpatía producida tras la lectura del trabajo manuscrito de mi predecesor Monasterio. Con este ánimo escribo el presente texto.

El arco siempre atrajo la atención del constructor así como la admiración del profano. Los motivos son varios. El arco representa la columna, que intenta transformarse en dintel, es decir, conservar la eficiencia tensional de trabajo de la sección, en la que ninguna fibra es superflua y todas se encuentran en iguales condiciones resistentes. El arco hace una pirueta genial al salvar un vano, que habría exigido antes de su invención la aparición simultánea de tensiones de fle-

xión y de compresión en un primitivo dintel. El arco convierte a éste en columna gracias a su forma geométrica. Por otra parte el arco, para ser tal, debe tener una sustentación muy exigente, capaz de soportar el empuje que produce, sino se deteriora en una viga o dintel curvos. Desafortunadamente a veces todavía se sigue olvidando este fenómeno indeseable al diseñar puentes arcos en terrenos no consistentes. Otra característica del arco es la solidaridad, ya que éste exige el trabajo simultáneo de todas sus dovelas para alcanzar su estabilidad. La esencia y existencia del arco surge al colocar la última dovela: la clave.

Sin embargo, el arco sólo es tal ante una única hipótesis de carga, lo que significa, cuando la hipótesis se modifica, que se transforma en menor o mayor medida en una viga curva, atemperada por el empuje de las acciones actuantes. Es el caso de las cargas móviles en los puentes arco de un camino. Afortunadamente en los arcos de piedra el peso propio y la carga permanente del relleno son muy grandes frente a las sobrecargas previstas en su construcción, por lo que las flexiones que se producen debido a éstas son muy débiles. Una afortunada intuición permite obtener la directriz del arco o curva definida por los centros de gravedad de las secciones normales, como la deformada de un cable sometido a dicha hipótesis de carga pero de signo opuesto a la considerada en el diseño del arco. Se puede mostrar que este resultado debe ser refinado con la introducción en el cálculo de las deformaciones del arco en el caso de material elástico (Samartín 1995).

El tratado *Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas* de Monasterio, versa sobre el cálculo de la estabilidad de arcos de piedra, también conocidos como arcos rígidos para diferenciarlos de los arcos elásticos que surgen al aparecer los nuevos materiales acero y hormigón. Monasterio utiliza el término *bóveda* para representar la estructura definida por Charles Bossut (1730-1814) del siguiente modo:

> Todo el mundo sabe que las piedras o dovelas que componen una bóveda forman una especie de pirámides truncadas, las cuales apoyándose las unas en las otras por sus caras laterales e inclinadas, se contrabalancean mutuamente, y quedan suspendidas en el aire sin apoyo inferior, dirigiendo todo su esfuerzo hacia los macizos o pies derechos que sostienen la bóveda, como si ésta no fuese sino un sólo y mismo cuerpo continuo. (Bossut 1805)

Entonces en el término bóveda se incluía el arco de piedra y su extensión natural la bóveda de cañón, que se conocía como *bóveda de cañón seguido* y la cúpula de revolución denominada *bóveda de media naranja*. Por ello se utilizará aquí, de forma laxa, como equivalentes los términos arco y bóveda, para designar las anteriores estructuras de piedra, si bien indudablemente en la acepción actual su comportamiento estructural es diferente.

DESARROLLO HISTÓRICO DEL PROYECTO DE ARCOS DE PIEDRA

Es conveniente presentar unas notas acerca de la evolución histórica de la construcción de los arcos de piedra, y en particular de su proyecto con objeto de situar históricamente el trabajo de Monasterio y sus contribuciones a la teoría de bóvedas de piedra.

Se han construido puentes arcos desde tiempos inmemoriales en las primeras civilizaciones, India, Mesopotamia, Egipto y Grecia entre otras, en conjunción con distintas formas estructurales, como dinteles y estructuras colgantes. A pesar del impresionante desarrollo alcanzado en la Física y la Geometría durante la civilización griega, con nombres como Arquímedes y Euclides, no se elaboraron reglas de proyecto y construcción de arcos. En el Imperio Romano, Vitrubio en sus diez libros de Arquitectura sólo recoge instrucciones relacionadas con la construcción de puentes arco, pero no sobre su proyecto. En general los puentes romanos eran arcos de medio punto y canto constante, aunque existían excepciones. Tras la caída del Imperio, la construcción de bóvedas y arcos de piedra continúa incesante durante la Edad Media. Los puentes arco construidos durante el Románico representan una continuación de los puentes romanos, muchos de ellos en España ligados al Camino de Santiago y a ordenes monásticas. En la época del Gótico se introduce la novedad tipológica del arco ojival. Esta novedad acaso surja como repuesta ante el problema del descimbramiento durante la construcción, con la necesidad del apeo de la dovela clave. A pesar del oscurantismo de los maestros medievales, que han conservado sus secretos de construcción dentro de aparentes logias masónicas, J. Fitchen (1905-1990) comenta que:

> existe una falta total de documentación escrita sobre la ingeniería estructural y los procedimientos de construcción. Sin embargo conviene resaltar que a pesar de la incapacidad de los maestros constructores medievales para resolver simples problemas de equilibrio estático, su genialidad se muestra en los numerosos arcos y bóvedas que han sobrevivido más de ochocientos años con un diseño casi perfecto. (Fitchen 1961)

La perfección del diseño y la belleza alcanzados en algunas catedrales hacen pensar en un sentido magistral de sus maestros constructores mayor que el que se puede conseguir con la aplicación de métodos de falsa posición. Acaso la experimentación con modelos pueda en parte explicar tales niveles de perfección.

El Renacimiento supuso la construcción de puentes singulares representativos de ciudades prósperas (Pont Neuf, Ponte Vecchio, etc.) y muchos de ellos sustituyendo a antiguos puentes de madera o de piedra. La directriz de los arcos deja en muchos casos de ser circular, siendo ya rebajada o peraltada. En esta época el gran artista y científico Leonardo da Vinci (1452-1519) recoge en sus notas aplicaciones de la Matemáticas a la Resistencia de Materiales, así como distintos resultados experimentales en vigas. Desgraciadamente estos importantes avances no fueron conocidos por los ingenieros de los siglos XV y XVI. Otro gran arquitecto, Andrea Palladio (1508-1580), construye puentes de madera tipo celosía de gran luz, unos rectos como el de cerca de Trento y otros en estructura arco. Ambos, da Vinci y Palladio, publicaron varios tratados de arquitectura en los cuales se han recopilado detalles de construcciones de puentes romanos y medievales.

No es hasta el siglo XVII con Galileo (1564-1642) cuando realmente se inicia la Resistencia de Materiales. En este siglo, el cálculo infinitesimal es creado de forma simultánea por Leibnitz (1646-1716) y Newton (1642-1727). Las primeras aplicaciones de este nuevo cálculo al diseño y construcción de estructuras se lleva a cabo por los hermanos Bernoulli, Jacob (1654-1705) y John (1667-1748). Se deben a Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrino de John, y en especial a Leonard Euler (1707-1783) importantes contribuciones en el Cálculo de Estructuras, pero ambos ya en el siglo siguiente XVIII o de las Luces. A este nuevo siglo pertenecen también Lagrange (1736-1813) y Jacques Bernoulli (1759-1789), otro sobrino de Daniel, que se caracteriza por las aplicaciones prácticas, a distintos campos militares y de la ingeniería, de los extraordinarios avances científicos al-

canzados en el siglo anterior. Las necesidades y nuevos problemas surgidos en estos campos requerían no sólo experiencia sino una respuesta basada en criterios racionales. La tradicional estructura de la transmisión de los conocimientos en la construcción: maestros constructores, oficiales y aprendices, desapareció completamente con la creación de las primeras escuelas de la ingeniería. Francia fue pionera en este cambio durante el cual se fundaron escuelas de ingeniería y se publicaron libros de textos de cálculo de estructuras. En 1720 se abren en ese país varias escuelas de artillería y B. F. de Bélidor (1698-1761) escribe un libro de texto para su uso en dichas escuelas, que incluye matemáticas elementales, aunque también recomienda el estudio del nuevo cálculo infinitesimal y presenta aplicaciones a la Mecánica, Geodesia y Artillería (Timoshenko 1953).

El cuerpo facultativo de la Inspección General de Caminos y Canales y la correspondiente Escuela de Ingenieros de Caminos y Canales se crean a principios del siglo XIX siguiendo el ejemplo de Francia. Detalles de este acontecimiento pueden verse en Sáenz (2005). La influencia de Francia se hacía sentir intensamente en toda Europa durante esa época. En efecto, a mitad del siglo anterior, tras la creación del Cuerpo de Ingenieros de Modos de Comunicación en 1720 se funda en París en 1747 la École Royale des Ponts et Chaussées siendo su primer director Jean-Rodolphe Perronet (1708-1794) desde la fecha de fundación hasta su muerte en 1794. Sin embargo, no es hasta 1755 cuando esta gran escuela cambia su nombre al actual de École Nationale de Ponts et Chaussées (ENPC). Perronet, aparte de su contribución a la Enciclopedia francesa, proyectó y construyó el puente de la Concordia, puente en arco sobre el Sena en París de una longitud total de 193 m y ancho 15 m. (Este puente fue construido en medio de los tiempos revueltos de la revolución francesa, en él se utilizaron como dovelas piedras de la destruida Bastilla y se finalizó su construcción en 1791. No es de extrañar que parte de la historia de Francia se vea reflejada en los modificaciones que de forma sucesiva ha experimentado el nombre de este puente a lo largo de su vida: Pont Louis XVI, Pont de la Revolution, Pont de la Concorde, para volver tras la restauración borbónica en 1814 a Pont Louis XVI para permanecer con el nombre actual desde 1830.)

La contribución de Perronet al diseño de puentes ha sido muy importante como muestra la publicación González y Aroca (2005), en la que se recoge sus

estudios sobre algunos aspectos constructivos de estos tipos de estructuras. Desde el punto de vista del proyecto, Perronet se centró esencialmente en: (1) la concepción de arcos múltiples en los cuales los empujes de arcos adyacentes se equilibraban entre sí consiguiendo de esta forma aumentar la longitud del puente; (2) el incremento del rebajamiento de los arcos, que facilitaba la funcionalidad del puente a costa de un incremento del empuje, trasladando de esta forma la estabilidad de la estructura al estribo y (3) el aligeramiento de los arcos, en consonancia con el arte gótico anterior. Aparte de sus aportaciones teóricas y estéticas, cabe destacar su entusiasmo por las ideas arquitectónicas neoclásicas de Jacques-Germain Soufflot, su ejecutoria en construcción de puentes ha sido considerable.

Hasta Perronet el problema del diseño y construcción de arcos rígidos, construidos por dovelas, ya en grandes mampuestos o sillares, había representado un desafío importante de proyecto y construcción. Como se ha comentado, en las centurias anteriores al siglo XVIII, las reglas existentes para un diseño seguro o estable estaban, aparentemente, bien basadas en la experiencia, o bien fundadas en ciertos números cabalísticos o mágicos que aseguraban la deseada estabilidad e incluso la estética del arco. El alarde técnico aparecía entonces al intentar rebasar los límites de algunos parámetros considerados esenciales en el diseño del arco, como la luz, el rebajamiento o proporción flecha-luz del arco.

A caballo entre los siglos XVIII y XIX los procedimientos de cálculo de arcos rígidos tenían un carácter pre-elástico. Dos de ellos eran entonces los más utilizados en el análisis de la estabilidad de puentes arco rígido en el tiempo de Monasterio. Uno aplicado en el Reino Unido correspondía a la teoría del equilibrio (*equilibrium theory*) basada en la idea de Hooke referente a la analogía entre arcos y cables. Este procedimiento había sido desarrollado por Emerson (1754), Hutton (1772) y Robison (1801) entre otros. Gregory (1697) consideraba el arco como antifunicular de cargas, es decir, como la estructura rígida de la deformada invertida, bajo las mismas cargas, del cable flexible. El otro procedimiento iniciado en Francia por La Hire (1640-1718), introdujo en 1712 el cálculo de arcos que se fundamentaba en la teoría conocida como la del punto de rotura (*point de rupture*). Esta teoría fue modificada por Bélidor en 1729. Este punto define el mecanismo de colapso del arco, en conjunción con las rótulas de coronación y

levantamiento del apoyo. En esta teoría no se intenta encontrar la directriz del arco sino conocer su empuje, el cual es necesario para comprobar la resistencia de las dovelas y de los estribos. Coulomb (1736-1806) introdujo en 1773 el rozamiento entre dovelas para refinar la teoría y localizar las juntas de rotura del arco mediante la aplicación de los conceptos de máximos y mínimos. Se comprobó cuarenta años mas tarde, a mediados del siglo XIX, que ambos procedimientos conducen a idénticos resultados. A partir de esta identificación se obtuvo una mejor comprensión del trabajo de un arco mediante la teoría de las líneas de presión. En esta teoría surgida simultáneamente en Francia y en Gran Bretaña, se define el concepto de linea de presión de un arco como el lugar geométrico del punto de aplicación de la resultante de las tensiones existentes en una sección normal del arco. La mamposteria del arco no resiste tracciones, por ello la línea de presiones debe de estar contenida dentro del núcleo central de la sección o en general, dentro de la sección del arco. Finalmente, el proceso de colapso por fallo de los estribos fue estudiado entonces, distinguiendo varios tipos de fallo, por Francois Michel Lecreulx (1729-1812) como se describe en Huerta (2005a).

ANTECEDENTES

Los antecedentes inmediatos del trabajo de Monasterio proceden de publicaciones contemporáneas sobre el tema, a las cuales tuvo acceso y hace referencia en su *Nueva teórica*. La mayoría de los autores citados por Monasterio son ingenieros o matemáticos relacionados con la ENPC, la Escuela Politécnica o la Academia de Ciencias Francesa. Entre estos autores cabe destacar La Hire, que aplicó por primera vez el concepto de polígono funicular al cálculo de arcos rígidos en 1695 (La Hire 1695). Supone en su memoria a la Academia Real de Ciencias en 1712 sobre el empuje de bóvedas que no existe rozamiento entre dovelas y que las secciones del arco en las que se produce la fractura se encuentra en el caso del arco de medio punto en las secciones definidas por un ángulo α con la vertical, que se debía determinar mediante tanteo. Bélidor (1729) sugiere que el ángulo α es aproximadamente 45º. La inestabilidad de los machones, que supone rígidos, ocurre por giro alrededor del punto inferior del trasdós del estribo. Obtiene

de esta forma un expresión de gran sencillez de cálculo, de aplicación frecuente por los constructores de entonces, tanto a las bóvedas de cañón seguido como a las de media naranja. Coulomb (1773) estudió el colapso de arcos rígidos suponiendo los modos de rotura obtenidos experimentalmente por Danyzy en 1732 en la Academia de Montpellier. En su análisis tuvo en cuenta que el movimiento relativo entre dovelas era no sólo de traslación sino que se debía incluir el de rotación. Sin embargo Coulomb sólo obtuvo límites para el empuje del arco y no dedujo fórmulas definidas de diseño, por lo que su trabajo no fue apreciado por los ingenieros de su tiempo, que continuaron utilizando los resultados de La Hire, que habían sido tabulados para su uso por Perronet y Chézy. No fue hasta el siglo siguiente en el que el método de Coulomb fue profusamente utilizado por los constructores de arcos rígidos al desarrollarse los métodos gráficos que permitieron su aplicación práctica. Couplet había presentado en la Academia de Ciencias en 1729 y en 1730 sendas memorias, en las que estudia el colapso de una bóveda en cada una de las dos hipótesis siguientes de movimiento entre dovelas: traslación sin rozamiento y rotación. Los resultados los aplicó a bóvedas circulares pero no representaron un avance significativo respecto a los conocimientos existentes. Estuvo Couplet más interesado en determinar la geometría del trasdós referida a la del intradós. Bossut (1805) en su memoria *Sobre el equilibrio de las bóvedas* al Institut National des Sciences et des Arts, nuevo nombre tras la Revolución de la Academia de Ciencias, estudia desde el punto de vista matemático, utilizando recursos de cálculo diferencial, una serie de problemas del equilibrio de las bóvedas idealizadas de cañón seguido y de las de media naranja, formulados de acuerdo con la teoría de arcos de La Hire. Finalmente, R. Prony (1755-1839), uno de los fundadores de la École Polytechnique y Director de la ENPC publica dos trabajos, existentes en la Escuela de Caminos de Madrid, sobre estabilidad de muros (Prony 1805). En estas publicaciones Prony trata el empuje de tierras sobre muros, con paredes verticales y/o inclinadas o con contrafuertes, sometidos a tierras con rozamiento interno y cohesión así como a fluidos. Supone que el muro es macizo, no de sillería o mampostería. Es curioso observar que Prony utiliza en estos estudios unidades no métricas, a pesar de ser un miembro de la comisión para el establecimiento del sistema decimal de medidas. Estas publicaciones representan en realidad una simplificación de la teoría de Coulomb con

tablas y gráficos de ayuda para su aplicación práctica, ayudas que no plantea Monasterio en su *Nueva teórica*.

La *Nueva teórica* de Monasterio se escribe en un momento crítico en la evolución de la construcción de arcos con la aparición del nuevo material en la construcción civil: el hierro. En efecto, la influencia de las teorías de Perronet, como la recibida por el insigne constructor de puentes inglés Thomas Telford (1757-1834) fue muy importante en su tiempo. Ha sido este ingeniero quien diseñó en 1800 un puente en arco de hierro fundido en Londres de 600 pies de luz sobre el Támesis en Londres. El Comité de selección del concurso de proyectos de este puente planteó, con la colaboración de un grupo de expertos entre los que se encontraba el propio Telford, una serie de cuestiones acerca de la viabilidad de los proyectos presentados. Tras las distintas repuestas recibidas, el Comité y el propio Telford llegaron a la conclusión de la necesidad de un mayor conocimiento del cálculo de arcos elásticos. Como consecuencia el comité no eligió el proyecto de Telford y propuso en su lugar uno rígido tradicional de piedra de tres arcos. La reacción en el mundo de la ingeniería en Inglaterra a este evento, que suponía un retroceso al avance de la construcción de puentes fue muy intensa. A pesar del cúmulo de publicaciones presentadas en los distintos fórums no se produjo ningún avance significativo en el diseño de puentes, hasta la aparición de las contribuciones de Thomas Young (1773-1829) en 1817 que inicia la moderna teoría de cálculo de arcos elásticos (Huerta 2005b). Era el paso de la tradición a la modernidad, de los arcos rígidos de piedra a los arcos elásticos de madera, hierro y más tarde de hormigón. En esa transición se sitúa el escrito de Monasterio, que opta por la tradición y escribe, dentro de ella, una obra madura e innovadora sobre la estabilidad de puentes arco rígidos, que no ha sido en mi opinión suficientemente reconocida en su tiempo.

RESUMEN DE LA *NUEVA TEÓRICA SOBRE EL EMPUJE DE BÓVEDAS*

La *Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas* de Joaquín Monasterio trata sobre el análisis de la estabilidad de arcos de piedra. Los resultados de este análisis de bóvedas o arcos, se aplica directamente al proyecto de las denominadas *bóve-*

das de cañón seguido y utilizando ciertas aproximaciones a las de *media naranja* o cúpulas de revolución. El manuscrito, que se conserva en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid y parece elaborado «a vuela pluma», si se observan las tachaduras y addenda entre líneas que contiene, está dividido en cinco partes. La primera es la introducción al tema así como una justificación de la necesidad de un estudio más elaborado y completo que los existentes entonces. Las cuatro partes siguientes corresponden a capítulos en los que se analizan las distintas formas de colapso del arco. El trabajo presenta una estructura análoga a la usual entonces de la École des Ponts et Chaussées. Cada capítulo se divide en secciones o números correlativos, que suelen contener un párrafo con el desarrollo de una idea. El número total de las secciones o números del trabajo es 79. Las fórmulas finales, deducidas por Monasterio, que son de importancia en el proyecto se identifican con letras mayúsculas (A), (B),…,(Z) de forma consecutiva en todo el manuscrito y las fórmulas auxiliares con números (1),(2),…dentro de cada capítulo. El número total de figuras de la *Nueva teórica* sobre empujes de bóvedas es 25 resumidas en dos páginas, las cuales sumadas a las manuscritas dan un total de 92 páginas. A continuación se resumen cada una de las partes del trabajo de Monasterio.

En la Introducción de su trabajo, el arco es considerado por Monasterio como un sistema mecánico de dovelas, es decir, sólidos rígidos, ligadas entre sí por coacciones procedentes de la impenetrabilidad de éstas y la convexidad del intradós. Supone las dovelas limitadas por juntas planas y no necesariamente normales a la directriz del arco. Con objeto de alcanzar fórmulas generales sujetas a la ley de continuidad, en el trabajo se considera que existe un conjunto infinito continuo de juntas en el arco, con lo que el estudio se encuentra del lado de la seguridad. El rozamiento entre dovelas es, en general, no nulo, aunque la resistencia del mortero entre juntas no se tiene en cuenta por suponer que dicha resistencia es muy baja en la situación crítica de la colocación de la dovela clave y del subsiguiente desapeo del arco. También introduce la hipótesis de una resistencia ilimitada a compresión del material de las dovelas del arco, pues admite que sus dimensiones se encuentran entre límites conocidos por la buena práctica. Monasterio plantea el equilibrio en el Estado Límite Último (ELU) del arco sometido a las cargas exteriores, peso propio del arco y relleno, y a las fuerzas re-

sistentes, de rozamiento y axiles en las juntas, generadas al producirse el modo de colapso del arco.

Con objeto de identificar las distintas formas de colapso del arco, Monasterio supone que cada dovela es susceptible de experimentar dos movimientos, uno *t* de traslación, es decir, resbalando a lo largo de la junta y otro *r* de rotación alrededor de un borde extremo de ésta, bien situado en el intradós o en el trasdós. Se produce un colapso del arco cuando éste se transforma en un mecanismo, es decir, si es posible que experimente un movimiento sin deformación. Este movimiento puede estar definido por una permutación con repetición de traslaciones *t* y rotaciones *r* en un conjunto *N* de dovelas, de acuerdo con el siguiente convenio: El movimiento del arco $a_1a_2a_3\ldots a_N$, siendo $a_i = t$ ó $a_i = r$, con $i = 1, 2,\ldots, N$ indica un modo de colapso del arco en el que *N* dovelas o trozos de arco se ponen en movimiento, con a_i el movimiento del trozo *i*. Monasterio demuestra que el estudio de todos los modos de colapso de un arco se reduce al de los siete movimientos siguientes: *tt*, *rrr*, *rrt*, *trr*, *tr*, *rt* y *trt*. Las siete primeras figuras de su Introducción representan los modos de mecanismo que experimenta un arco biempotrado en sus extremos. Los movimientos «puros» de traslación y rotación corresponden respectivamente a los dos primeros movimientos *tt* y *rrr*. Estos movimientos puros son objeto respectivamente de los dos primeros capítulos del trabajo. Los cinco movimientos restantes se denominan «mixtos» y se tratan de forma conjunta en el capítulo tercero de la *Nueva teórica*. La posición más desfavorable o crítica de las dovelas, que intervienen en el modo de colapso, se determina para dicho modo a partir de la condición de mínimo del valor de la estabilidad. Este valor lo define Monasterio como la diferencia entre las cargas resistentes y las exteriores desestabilizadoras y debe ser positiva para que el arco sea estable. Finalmente, la quinta parte, representada por el capítulo cuarto, analiza el importante tema de la estabilidad de los estribos y machones o pilares que soportan el arco. El autor pone énfasis en considerar estos elementos compuestos de sillares con juntas verticales y horizontales, en lugar de ser monolíticos como se suponía normalmente entonces. También, estudia el caso general de estribos en los cuales el remate de todas las dovelas del arco no es coincidente con el trasdós del estribo.

En el capítulo primero un resultado interesante obtenido por Monasterio es la condición de estabilidad del modo puro de traslación expresada en la fórmula

(A) del capítulo. Así mismo, basándose en la citada fórmula determina, suponiendo rozamiento nulo entre juntas normales a la directriz del arco, las curvas antifunicular primera (catenaria plana o de cañón seguido) y la antifunicular segunda (catenaria de revolución o de media naranja) de la bóveda y de la cúpula, ambas de espesor constante respectivamente, mediante la solución de sendas ecuaciones diferenciales. Estos dos resultados habían sido obtenidos por Bossut (1805) de forma independiente mediante el cálculo de la solución de sendas ecuaciones diferenciales. Para el caso de arcos simétricos llega a una fórmula (B) sencilla que permite definir las dovelas críticas. Finalmente, calcula el valor del ángulo de rozamiento mínimo, $f = \arctan 0{,}31$, que evita el modo puro de traslación. Se tiene en cuenta este resultado en el tratamiento de situaciones de rozamiento nulo o muy pequeño, como ocurre en el descimbrado de puentes en las que se puede producir modificaciones importantes de su geometría. En este contexto estudia y comenta el caso del descimbrado del puente S. Edme de Nogent sobre el Sena de Perronet.

El capítulo segundo, en el que se trata la estabilidad de arcos con modo puro de rotación, sigue una linea paralela al capítulo anterior. En primer lugar deduce una fórmula (C), más compleja que su análoga (A) del primer capítulo, en la que determina la condición de estabilidad ante el modo puro de rotación. Establece, a partir de esta ecuación (C), las condiciones para que las bóvedas de cañón seguido y de media naranja no colapsen en modo puro de rotación cuando su espesor se hace infinitamente pequeño. El resultado que obtiene es que las directrices de estas bóvedas sean una catenaria plana o una catenaria de revolución respectivamente. El proceso llevado a cabo para obtener este resultado consistió en la deducción de las ecuaciones diferenciales correspondientes a partir de la fórmula (C). Éstas resultan idénticas a las alcanzadas en el capítulo anterior en la deducción de los respectivas curvas antifuniculares. En el caso de bóvedas simétricas la fórmula (C) se sustituye por las más sencillas, (D) y (E), que representan las condiciones que tienen que satisfacer los arcos para impedir un colapso por uno de los dos modos con rotación pura en seis juntas simétricas respecto a la clave. Uno de estos dos modos es hundimiento de la zona central con elevación de riñones y el otro es elevación de aquella con hundimiento de éstos. Ambos modos están representados en las figuras 12 y 13 del manuscrito. A partir de estas fórmu-

las deduce sus fórmulas derivadas, (F) y (G), que definen las juntas más desfavorables. La teoría desarrollada es aplicada a un ejemplo de una bóveda de medio punto con un espesor igual a una fracción *kx* del radio del arco interior, con *k* constante y *x* abscisa. El objetivo del cálculo es obtener el valor mínimo de *k* que impide el modo de colapso de rotación pura. Monasterio halla el valor $k = 1/8$ con la junta de rotura definida aproximadamente por el ángulo $\alpha = 55^0$. Si se aplica la teórica de Couplet a este ejemplo se obtiene un espesor de $k = 0{,}1061$, que es erróneo, ya que se produciría el colapso. La causa del error reside en que Couplet supone a priori que la junta de rotura forma con la vertical un ángulo de 45º, en lugar del ángulo α calculado por nuestro autor.

El denso capítulo tercero trata de los cinco modos mixtos de colapso de un arco, que Monasterio divide en dos grupos. El primero, correspondientes a los modos de primera y segunda especie deducidos de las permutaciones *rrt* y *trr*, los cuales se diferencian entre sí al suponer en el primer modo que la dovela desliza hacia el centro del arco y en el segundo modo la traslación es hacia el exterior. Las inecuaciones (H) e (I) representan las condiciones de estabilidad frente a estos dos modos, y han sido deducidas tras la descomposición de las fuerzas actuantes, exteriores y resistentes. La especialización de estas fórmulas al arco simétrico conduce a las (K) y (L). Por consiguiente, estas expresiones unidas a las (D) y (E) aseguran la estabilidad de un arco simétrico ante los modos mixtos de primera y segunda especie. Se pueden, de acuerdo con Monasterio, sustituir el grupo anterior de cuatro inecuaciones por las fórmulas (M) y (N), que son suficientes en general para impedir en un arco los movimientos mixtos de primera y segunda especie. A continuación presenta dos ejemplos de aplicación de estas fórmulas últimas al estudio de la estabilidad de una bóveda al modo mixto de primera especie. El primero corresponde a la bóveda de medio punto simétrica descrita en el ejemplo del capítulo anterior. Se alcanza la estabilidad en este caso, bien aumentando el rozamiento mínimo para el modo de traslación pura o bien incrementado el espesor mínimo preciso para el modo de rotación pura. Se comprueba que, tras la aplicación de la teoría desarrollada, para $f = \arctan 0{,}50 > 25{,}56^o$ y el espesor mínimo (1/8) x, se consigue la estabilidad al modo mixto de primera especie. El otro ejemplo se refiere a una bóveda adintelada, un tipo susceptible a colapsar por un modo mixto de primera especie. Se obtiene en este caso que un

rebajamiento flecha/luz ≥ ½ en este tipo de arcos permite asegurar su estabilidad frente a modos mixtos de la primera y segunda especie, cualquiera que sea su ángulo de arranque.

Los restantes modos mixtos de colapso de tercera, cuarta y quinta especie, definidos respectivamente por las permutaciones *tr*, *rt* y *trt* se tratan en esta última parte del capítulo tercero. Procediendo de forma similar a los capítulos anteriores se deducen para la bóveda general las tres condiciones de estabilidad (O), (P) y (Q) respecto a los tres modos mixtos considerados. Si se restringe la discusión al caso de bóvedas simétricas Monasterio concluye que si en éstas no se producen modos de puros de traslación ni mixtos de primera y segunda especie, entonces en estas bóvedas no pueden tener lugar tampoco un modo de quinta especie y la condición (Q) puede ser suprimida. Análoga conclusión se llega respecto a los modos mixtos de tercera y cuarta especie que no pueden aparecer si no se producen modos puros de rotación ni mixtos de primera y segunda especie. Estos resultados inducen a Monasterio criticar la práctica común entonces del cálculo de machones. En el caso general de arcos no simétricos el problema de su estabilidad es complejo, por el número de condiciones que deben ser satisfechas, (A), (C), (H), (I), (O), (P) y (Q), y por lo tanto de difícil aplicación práctica, si se tiene en cuenta la escasa capacidad de computación de su tiempo. Ante esta situación el autor de la *Nueva teórica* deduce con ciertas aproximaciones unas fórmulas simplificadas, dadas por el sistema (R) de cinco inecuaciones, que permiten un tratamiento adecuado del caso general de la estabilidad de los arcos.

Los resultados obtenidos en los tres capítulos anteriores sobre los modos de colapso de las bóvedas son utilizados en la última parte de la *Nueva teórica* para la obtención del grueso de los machones. Se trata de determinar el espesor del estribo necesario para resistir el empuje del arco en cada uno de sus modos de colapso. Se limita el estudio a bóvedas simétricas y descarta por su rareza el modo de colapso de traslación pura, que exige para su ocurrencia un valor muy bajo para rozamiento entre dovelas. Sin embargo el autor considera que cada pie derecho no es monolítico, es decir, está constituido por sillares del mismo tamaño y dispuestos de una forma regular que se especifica, así como que las dovelas no rematan necesariamente en el trasdós. Las líneas de rotura de los machones se definen suponiendo que tanto las dimensiones de las dovelas como las de los si-

llares son infinitésimas en comparación con las del arco. Se tiene en cuenta el rozamiento entre las juntas verticales de los sillares que componen el machón pero se supone nulo ente juntas horizontales. Para el caso de que el colapso del arco se produzca con giros alrededor de aristas exteriores de los machones Monasterio deduce las fórmulas (S) y (T) simplificadas y suficientemente aproximadas para el proyecto de estribos. A partir de estas fórmulas se confirma la aparición de formas de ruina de estribos, distintas a las supuestas hasta entonces. Así en unos casos por fallo de secciones intermedias del pie derecho, es decir, el colapso del arco no se produce necesariamente por un giro alrededor de la sección de la base del machón. Las fórmulas anteriores, que son aplicables cuando el ancho de la base del estribo es mayor que la mitad de su altura, se complementan con otra condición (V), válida para estribos con base menor que la mitad de su altura. En ambos casos se hace preciso determinar la posición de la junta de colapso del arco más cercana al estribo. En los dos ejemplos de comprobación de proyecto, uno de un arco de medio punto y el otro de una bóveda semielíptica rebajada, Monasterio evita la complicación de cálculo que representa la identificación de la anterior junta de colapso del arco, suponiendo que ésta se produce en una posición prefijada. Comprueba en el último ejemplo que «no siempre los estribos necesitan aumentar su grueso por aumentar de altura». El tratamiento del dimensionamiento de los estribos de arcos escarzanos difiere ligeramente de los arcos anteriores. Utiliza en este caso las expresiones (U) y (X), que se aplican a dos ejemplos de arcos circulares, uno de 120 grados y el otro de 60 grados de arco central. En ambos casos la relación flecha/semiluz es un décimo. Monasterio compara los resultados obtenidos en los cuatro ejemplos anteriores con los deducidos mediante un método práctico de origen antiguo muy utilizado por los constructores, pero sin fundamento teórico conocido. No advierte un diferencia notable entre los diseños alcanzados mediante ambos métodos, particularmente en los arcos no escarzanos de los dos primeros ejemplos. Por otra parte, Monasterio lleva a cabo un estudio preliminar de la influencia en el diseño del machón de las dimensiones y materiales de la mamposteria y sillares de los estribos así como de la calidad de su trabazón. Finaliza el capítulo con dos apartados, uno referente al dimensionamiento del estribo cuando el colapso del arco se produce por un modo mixto de primera especie, en el que aconseja aplicar la fórmula (Z), la cual

conduce a un valor mínimo del espesor del machón. Esta fórmula es muy sensible al valor del rozamiento que se considere en el arco, por lo que el autor recomienda una cuidadosa medición experimental de dicha magnitud. En el otro apartado Monasterio indica una posible extensión, aproximada desde el lado de la seguridad, de los resultados de este capítulo a estribos de bóvedas de media naranja, mediante la consideración de un arco ficticio, resultante de dos planos meridianos próximos que contienen el eje de revolución de la cúpula.

COMENTARIOS A LA *NUEVA TEÓRICA SOBRE EL EMPUJE DE BÓVEDAS*

Se puede resumir la teoría presentada por Monasterio como pre-elástica, es decir, estudia la estabilidad del arco en el estado último de colapso, como era usual en su tiempo. Sin embargo, a diferencia de las dos escuelas, francesa e inglesa, identifica inicialmente por consideraciones puramente cinemáticas los modos de colapso de un arco. Monasterio considera el arco rígido de dovelas como un mecanismo compuesto de un conjunto de bloques rígidos con dos posibles movimientos relativos o grados de libertad (gdl) entre las caras de las dovelas contiguas, uno de traslación y otro de rotación alrededor de uno de sus bordes. Además asume que se pueden producir en los apoyos o uniones con los estribos movimientos absolutos (gdl) de giro y eventualmente de traslación. Existen unas restricciones a estos movimientos debidas a la impenetrabilidad de las dovelas y desprecia las fuerzas de cohesion en las juntas así como la ocurrencia de roturas locales de los bloques, pero tiene en cuenta el rozamiento en los movimientos de traslación. El objetivo del trabajo se centra en la estabilidad global del arco. A partir del sistema cinemático anterior Monasterio deduce su grado de libertad cinemático o número de mecanismos de colapso linealmente independientes. En cada uno de los mecanismos de colapso, definido como una combinación lineal de todos los gdl del arco, se determinan las fuerzas internas que se generan en las coacciones del arco y que deben de equilibrar las acciones exteriores. Corresponde este método a un cálculo típico en rotura o estado último de una estructura, conceptualmente análogo al cálculo plástico de pórticos desarrollado por M.R. Horne (1981) y W. Prager (1959),

entre otros, o al método basado en la teoría de las líneas de rotura en placas de K.W. Johansen (1962).

Monasterio en su *Nueva teórica* se revela como un buen conocedor del estado del arte de los métodos de cálculo de la estabilidad de arcos de piedra. En efecto, a lo largo de su trabajo, al comentar los resultados alcanzados, los compara con los obtenidos por algunos de los autores relevantes en el tema, como Coulomb, La Hire, Couplet y Bossut entre otros. La deducción de los resultados en la *Nueva teórica* es equilibrada pues utiliza por una parte herramientas matemáticas avanzadas y por otra los justifica mediante un discurso con un fuerte contenido físico e intuitivo. No pierde en ningún momento de vista su aplicación práctica, introduciendo bien casos particulares importantes, como es la especialización del caso general de bóvedas a las bóvedas simétricas o bien simplificaciones en las fórmulas generales para llegar a otras aproximadas de aplicación más sencilla.

Las aportaciones de Monasterio con este trabajo son varias y relevantes. En primer lugar la utilización de forma sistemática del cálculo en rotura de un arco rígido, identificando todos los posibles modos de su colapso, mediante un procedimiento combinatorio no usual en la literatura técnica de su tiempo. La consideración en su trabajo de los dos movimientos relativos entre dovelas, rotación y traslación, que si bien habían sido tenido en cuenta antes por Coulomb, los resultados de éste, por los motivos ya indicados, no fueron asequibles a los ingenieros coetáneos de Monasterio. En la determinación de las condiciones de estabilidad Monasterio utiliza las ideas de máximo y mínimo de la diferencia entre las acciones exteriores y las fuerzas resistentes que se generan con el modo de colapso, siguiendo y citando las ideas de Coulomb en la estabilidad de suelos y arcos. Otras interesantes novedades presentadas por Monasterio son la consideración del rozamiento y del modelo continuo de arco, es decir, supone en éste que la sección de rotura puede producirse en cualquier sección y no sólo en las juntas entre dovelas reales. Por otra parte amplía el estudio de la estabilidad del estribo al considerarlo, no como un elemento estructural monolítico, sino formado por bloques rígidos. De esta forma Monasterio se aparta del modelo menos riguroso de estribo como medio continuo propuesto por Mayniel (1808). También Navier (1785-1836) propone este modelo continuo en un apéndice del libro de su tío Gauthey (1732-1807) sobre puentes, que editó después de su muerte (Gauthey 1809). Esta

postura de Navier, que mantuvo entonces, a pesar de las objeciones del propio Gauthey, es ratificada por él mismo en las nuevas publicaciones de 1826 y de 1839. Hace falta llegar a 1854 para que el procedimiento de Monasterio, que implica que las líneas de rotura del estribo son dependientes de las dimensiones de los bloques, fuera confirmado por Walther. Detalles de este tema pueden verse en Huerta y Foce (2003).

En general, el planteamiento y los resultados obtenidos por Monasterio, en el análisis del problema de la estabilidad de arcos rígidos, son correctos en su conjunto y más avanzados que los utilizados en su tiempo e incluso que muchos otros que se desarrollaron posteriormente. Sin embargo, a pesar de las innovaciones teóricas de Monasterio, parece que su trabajo no tuvo una amplia repercusión, ya que algunos de los resultados por él obtenidos fueron redescubiertos varias decenas de años más tarde. Por otra parte, según comentan Huerta y Foce (2003), Monasterio incurre en algunos errores en el tercer capítulo de su escrito, en relación con los modos 3 y 5 de colapso entre los siete que había identificado. La dificultad de detección de dicho errores, comentan Huerta y Foce, se ha mostrado patente al ser éstos repetidos por autores como Poncelet (1835). Ha sido medio siglo después cuando Michon (1857) por primera vez describió de forma correcta los modos de rotura de un puente en arco rígido. Incluso el gran ingeniero Eduardo Saavedra en su traducción de la publicación de Michon comete el mismo error que Monasterio y Poncelet. Sería interesante, por lo tanto, llevar a cabo un estudio más detallado del tema dirigido a una adecuada identificación y posterior evaluación de la importancia de los susodichos errores en los resultados finales de la estabilidad de un arco rígido.

Se puede resumir la aportación de Monasterio al cálculo de puentes arco rígidos como el inicio de un moderno planteamiento del tema, que en la actualidad todavía conserva su interés. Ello es debido a la necesidad de una gestión adecuada de los puentes de piedra existentes, que ha dado origen tanto a una puesta a punto de métodos de proyecto en el caso de proceder a su reparación o restauración como al desarrollo de métodos de cálculo si se trata de comprobar su seguridad ante tráfico de cargas procedentes de vehículos extraordinarios. En este contexto la excelente tesis de Martín-Caro (2001) representa un buen ejemplo de recopilación del estado de arte de los métodos de cálculo y comprobación de

puentes rígidos. Un ejemplo de uno de estos métodos corresponde al presentado por Jacques Heyman (1969). En su planteamiento se procede, de forma semejante a la Monasterio, a la comprobación del estado límite último pero ahora teniendo en cuenta también las líneas de presiones de un arco. Para ello Heyman utiliza los teoremas de límites máximo y mínimo del cálculo plástico, que fueron originariamente aplicados a estructuras metálicas continuas e introduce el concepto de *arco de espesor mínimo* a partir del arco rígido real y una línea de presiones propia, es decir, contenida en su espesor a lo largo del arco. El arco de espesor mínimo se obtiene eliminando la zonas «innecesarias» del arco real. El calculo puede efectuarse de forma sencilla sobre este arco ficticio. Heyman extiende estas ideas y la recoge en Heyman (1995), donde aplica un cálculo simplificado, que contiene una cierta componente heurística y que permite llevar a cabo la comprobación, mantenimiento y restauración de estructuras de arcos rígidos.

Naturalmente, en el lapso que discurre desde Monasterio a la actualidad han aparecido un conjunto de problemas relacionados con el diseño de arcos de piedra. Uno de ellos es la existencia de la oblicuidad. El esviaje de los arcos de piedra exige una definición geométrica compleja en su construcción o bien un cálculo laborioso sobre modelos de estructuras normalmente bi- o tridimensionales. El problema geométrico de la oblicuidad ha dado origen a la ciencia de la estereotomía. Otros problemas importantes, que todavía precisan estudios más profundos, son la determinación del comportamiento del puente de piedra en servicio o de su respuesta ante acciones dinámicas como son las sísmicas. Estos problemas demanda recursos teóricos y computacionales importantes, ya que exigen un cálculo no lineal no suave, (*nonsmooth non linear problems* en la literatura anglosajona). En efecto, el estudio de la relación de los bloques entre sí, se enmarca dentro de un planteamiento de contacto-impacto, con rozamiento de tipo Coulomb (Belytschko et al. 2000). La respuesta de una estructura así considerada debe ser tratada en el marco de un programa de cálculo de estructuras no lineal en grandes desplazamientos y material no lineal utilizando procedimientos incrementales-iterativos, tipo lagrangiano o lagrangiano actualizado, y en el caso de acciones dinámicas es preciso considerar esquemas de integración implícitos y/o explícitos. La respuesta en estos casos presenta discontinuidades que exigen

a veces la aplicación de técnicas de regularización que pueden distorsionar la respuesta de la estructura.

Trayectoria distinta ha seguido el cálculo de los arcos elásticos o continuos, procedentes del uso del acero y la madera, y más tarde del hormigón. Los desarrollos de la Elasticidad (Samartín 1990) y de la Resistencia de Materiales (Samartín 1995) durante los siglos XIX y XX han permitido resolver la mayoría de los distintos desafíos que implicaban el diseño de los arcos de los nuevos materiales. Sin embargo, no fue hasta mediados del siglo XX cuando la conjunción de la aparición del computador y del método de elementos finitos, iniciado en la ingeniería con el famoso artículo de Turner et al. (1956), permitió resolver los problemas planteados en el cálculo no lineal, como el pandeo dentro y fuera del plano del arco, en sus modalidades de bifurcación de equilibrio, punto límite y cambio brusco de forma así como los más complejos relacionados con la inestabilidad dinámica. Otros problemas se encuentran actualmente en fase de solución, como el comportamiento de arcos mixtos, constituidos por tubos de acero rellenos de hormigón, denominados en inglés Concrete Filled Tubes (CFT). Estos arcos se caracterizan porque en ellos no se disponen conectores con objeto de evitar posibles fallos y coqueras durante el hormigonado. El estudio de las fases de servicio y última de la estructura, desde un punto de vista computacional, es muy laborioso ya que el trabajo conjunto de estos materiales es complejo, en particular si se tienen en cuenta los efectos reológicos del hormigón, sus condiciones constitutivas tridimensionales y el rozamiento entre tubo y hormigón.

Comentarios finales

Se puede intuir tras esta breve reseña histórica la estructura arco, particularmente el arco elástico, como el primer intento de ésta a adelantarse a la acción de la carga, para que pueda ser resistida del modo más eficiente posible, es decir, mediante compresiones. Sin embargo, en el caso de arcos de hormigón, los efectos reológicos perturban dicho intento y fue necesaria la actuación del cierre en clave de Freyssinet en Plougastel para continuar con la actitud de anticipación a las accio-

nes. De esta forma la estructura arco ha contribuido al nacimiento de las estructuras pretensadas, que representan el inicio de una actuación de control pasivo en dichas estructuras cuando se encuentran sometidas a varios casos de carga. No es de extrañar entonces que como lógica continuación surja la introducción y el desarrollo actual de las técnicas de control tanto pasivo como activo en estructuras, que permite que éstas, ya estructuras inteligentes, puedan resistir varias hipótesis de carga en condiciones óptimas.

Así pues, no es difícil soñar que, pasados otros dos siglos, un ingeniero de caminos profesor de la Escuela en la que se imparte una formación sustentada en una tradición en la que se aprecia el rigor por la obra bien hecha, tenga que comentar los logros de nuestro tiempo. Acaso serán éstos para él como unos balbuceos que anunciaban todos los avances alcanzados entonces, en una técnica que utilizará en sus puentes, dentro de un respeto al entorno, bien modelos de cálculo comprehensivos de diseño, optimización y comprobación, o materiales inteligentes capaces de modificar de forma controlada sus propiedades resistentes ante las acciones o nuevos materiales cuyas relaciones peso específico-resistencia sean más adecuadas que las de los actuales. Esperamos que sus comentarios tengan entonces el mismo espíritu de simpatía y el reconocimiento a sus antecesores, que los que ha intentado el que escribe estas líneas.

Referencias

Belytschko, T., W. K. Liu, y B. Moran. 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York: John Wiley and Sons.

Bélidor, B. F. de. 1729. *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'Architecture civile*. Paris: Jombert.

Bossut, C. 1805. *Investigaciones sobre el equilibrio de bóvedas traducidas al castellano para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos*. Madrid: ETS Ingenieros de Caminos.

Coulomb, C. A. 1776. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées (Paris),* année 1773, 7: 343–382.

Fitchen, J. 1961. *The Construction of Gothic Cathedrals*. Chicago:The University Chicago.

Gauthey, E.-M. 1809. *Oeuvres.- Traité de la Construction des Ponts* (editada por Navier), Paris: Firmin Didot.

Gonzalez Redondo, E. y R. Aroca Hernández-Ros. 2005. Cimbrado y descimbrado de puentes en el s. XVIII: Perronet. En *Cuarto Congreso Internacional de Historia de la Construcción. Cádiz. 27-29 enero 2005*. Madrid: Instituto Juan de Herrera: 519–527.

Gregory, D. 1697. Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 19: 637–652.

Heyman, J. 1969. The Safety of Mansonry Arches. *International Journal of Mechanical Science* 11: 363–385.

Heyman, J. 1995. *The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press.

Horne, M.R. 1981. *Plastic theory of Structures*. London: Pergamon Press.

Huerta, S. 2005a. Lecreulx 1774: Una memoria inédita sobre colapso de estribos. En *Cuarto Congreso Internacional de Historia de la Construcción. Cadiz. 27-29 enero 2005*. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU: 593–603.

Huerta, S. 2005b. Thomas Young's theory of the arch. His analysis of Telford´s design for an iron arch of 600 feet over the Thames in London. En *Essays in the history of the theory of structures. In honour of Jacques Heyman*. S. Huerta (ed.). Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU: 189–233,

Huerta, S. y F. Foce. 2003. Vault theory in Spain between XVIII and XIX century: Monasterio's unpublished manuscript "Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas". En *First International Congress on Construction History*. S. Huerta (ed.). Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU: 1155–1166.

Johansen, K. W. 1962. *Yield-line theory*. London:Cement and Concrete Association.

La Hire, Ph. de. 1695. *Traité de Mécanique*. Paris: Imprimerie Royal.

Martin-Caro, J. A. 2001. *Análisis estructural de puentes arco de fábrica. Criterios de comprobación*. Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid.

Mayniel, J.-H. 1808. *Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement*. Paris: D. Colas.

Michon, F. 1857. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*. Metz: lithographie de l'École de Metz.

Prager, W. 1959. *An introduction to Plasticity*. Reading, Ma.: Addison-Wesley.

Prony, G. R. 1805. *Sobre el empuje de las tierras. Método práctico para determinar las dimensiones de los muros de revestimiento*. Traducida para el uso de los estudios de la Inspección General de Caminos. Madrid: Imprenta Real.

Samartin, A. 1990. *Curso de Elasticidad*. Madrid: Editorial Bellisco.

Samartin, A. 1995. *Resistencia de Materiales*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Sáenz Ridruejo, F. 2005. *Una historia de la Escuela de Caminos. (I parte 1802-1898).* Madrid: Fundación Agustín de Betancourt, ETSI Caminos, Canales y Puertos.

Timoshenko, S. P. 1953. *History of Strength of Materials*. New York: MacGraw Hill.

Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp. 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences* 23:805–823.

Walther, F. 1855. Praktisches Verfahren zur Construction der Mittellinie des Drucks in Tonnengewölben. *Zeitschrift für Bauwesen* 5: 383–392

Nueva teórica sobre el empuje de bóvedas

La Transcripción

Este trabajo es de un profesor de la primitiva escuela de Caminos llamado Monasterio, y me lo regaló mi maestro D. Francisco de Travesedo.

Eduardo Saavedra

Introducción

Es bien extraño que la teórica de bóvedas, siendo uno de los ramos de mecánica que mejor se prestan al análisis por conocerse suficientemente las leyes de los principales elementos físicos que entran en su discusión, haya sido tratada hasta el presente con tan poca exactitud y extensión, no obstante de tener una aplicación muy inmediata a la práctica y ser su utilidad de las más conocidas. Si consultamos las obras de cierta clase de Autores que se introducen a tratar especulativamente esta materia, cuando sus conocimientos sólo se extienden a dar reglas prácticas de construcción, no encontramos más que una confusa mezcla de principios de Geometría y de Estática, mal entendidos y aplicados; y si examinamos las de aquellos cuyo mérito en el análisis es bien notorio por el tino con el que han desempeñado asuntos de mayor importancia, veremos únicamente cálculos fundados en hipótesis falsas, o fórmulas inútiles, tanto por la arbitrariedad y restricciones con que están sacadas, como porque sólo sirven para impedir algunos movimientos, y no los que más comúnmente adquieren las bóvedas. Estos últimos Autores, por no detenerse a mirar el asunto bajo su verdadero punto de vista, creyeron que para asegurarse de la solidez de un arco, bastaba resolver dos cuestiones que se refiriesen a impedir separadamente los movimientos de traslación y rotación, siguiendo en esto el proceder que se observa en los problemas elementales de Mecánica; pero la insuficiencia de semejante método, aplicado sin ma-

yor extensión a las bóvedas, se demuestra por la teórica igualmente que por la observación. Sabemos que un arco es el agregado de varios cuerpos, a quienes se da el nombre de dovelas, capaces por su figura y colocación de moverse de diferentes maneras, y al mismo tiempo que para reducir al estado de reposo un sistema de cuerpos ligados entre sí y solicitados por varias fuerzas, es necesario tener tantas condiciones que satisfacer cuantos movimientos diferentes se pueden concebir en él: así, pues, si la teórica de Bóvedas ha de tener por objeto impedir que [3/4] los arcos se vengan abajo, y que padezcan alteraciones susceptibles de perjudicar a su solidez, es claro que no las desempeñaremos debidamente, mientras no se averigüen primero todos los movimientos que pueden adquirir las diferentes partes en que se divide una bóveda, para hallar después con arreglo a este conocimiento las condiciones correspondientes a evitar cada uno de aquellos movimientos en particular: y sólo siguiendo el camino trazado por este raciocinio, conseguiremos que nuestras aplicaciones sean útiles a la práctica, y estén exentas de los errores cometidos hasta aquí.

Es verdad que los movimientos de traslación y rotación son los únicos simples conocidos en la Mecánica, y que exigen distintos principios en su discusión; pero no por eso se sigue que han de ser solo dos las condiciones que deban satisfacerse para impedir la ruina de las bóvedas. Un arco cualquiera puede venirse abajo abriéndose por uno, dos, tres, o más trozos, y además cada uno de estos adquirir el movimiento de rotación o el de traslación, esto es, moverse apoyado en uno de los extremos de su junta de rotura, o resbalando a lo largo de ella; y es evidente que según sean diferentes las circunstancias que acompañen a estos movimientos, así deberán variar de forma las condiciones que los evitan: de suerte que por lo visto, el exacto conocimiento de todas estas circunstancias ha de depender necesariamente del número de permutaciones que admiten dos letras que representen, la una el movimiento de traslación, y la otra el de rotación. En efecto, si por la letra t indicamos el movimiento de traslación, y por la letra r el de rotación, y combinamos estas dos letras entre sí de todos los modos posibles, sus diferentes permutaciones nos darán a conocer las diversas especies de movimientos que pueden tomar los trozos de un arco, haciendo que el número de caras de cada permutación exprese el de los trozos que se ponen en movimiento, y las letras de que consta manifiesten, según la significación que acabamos de darles y

el orden con que se hallan escritas, la especie de movimiento con que se supone [4/5] obrando cada uno de estos trozos. Así convenidos, y presentadas las referidas permutaciones con el orden siguiente:

t, r, tt, tr, rt, rr, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, tttr, ttrt, trtt, rttt, &c.

advertiremos desde luego que las dos primeras y la sexta no pueden tener cabida en el asunto que nos ocupa, porque atendida la figura de cuña de las dovelas, su impenetrabilidad y la convexidad del intradós mirado desde arriba para abajo, ni un trozo puede adquirir aisladamente el movimiento de traslación, ni menos dos solos el movimiento de rotación: por consiguiente, debemos descartar las tres permutaciones dichas, y quedan reducidas las otras a

tt, tr, rt, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, tttr, ttrt, trtt, &c.

Si observamos ahora que todas las permutaciones que constan de más de tres caras, se pueden descomponer, sin alterar el orden con que están escritas las letras, en grupos enteramente iguales a alguna de las once primeras permutaciones, no admite duda que suponiendo evitados los movimientos expresados por estas once, deben igualmente estar los que se deducen de todas las otras. Por ejemplo, la permutación *trrtr* se forma de las dos *trr* y *tr*, y como suponemos que no tienen lugar los movimientos expresados por estas dos últimas, quiere decir que los tres primeros trozos deben considerarse unidos y como formando uno solo, y de la misma suerte los otros dos últimos: luego el movimiento de cinco trozos, expresado por la permutación *trrtr*, esta implícitamente contenido en los que se refieren a las once primeras.

A primera vista parece que también se podrían reducir las permutaciones de tres casos a las de dos, haciendo reflexiones análogas a las acabadas de hacer en el ejemplo anterior; pero es fácil notar que este proceder seria defectuoso aplicado con toda generalidad, porque hay movimientos que no pueden verificarse absolutamente, mientras el arco no se abra lo menos por tres trozos diferentes, tal [5/6] es el caso en que se supone a todos ellos con movimiento de rotación según lo representa la Fig. 2. Lo que sí se puede hacer es reducir todavía a menor nú-

mero las once permutaciones que nos quedan descartando las cuatro *ttr*, *rtt*, *rtr*, *ttt*, porque si suponemos los dos primeros trozos con el movimiento que en cada una de ellas expresan las dos primeras letras, veremos que ya es posible de verificarse la ruina del arco, sin necesidad de poner en acción al tercer trozo, y por lo tanto la introducción de éste es inútil, pues que con él resulta la cuestión acompañada de más datos que los necesarios para resolverla. Esto nos da a entender que los movimientos expresados por las cuatro permutaciones referidas se incluyen realmente en los dimanados de considerar las tres *tt*, *tr* y *rt*, que ya tenemos, y que resultan de quitar a aquéllas la última letra: de consiguiente, concluiremos por último que todos los diferentes movimientos con que un arco puede venirse abajo, están contenidos en la consideración de las siete permutaciones siguientes:

tt, rrr, rrt, trr, tr, rt, trt.

El movimiento expresado por la primera permutación, lo representa la Fig. 1, con los dos trozos $M_{,}N'$ y $N'M''$ que se suponen resbalando por sus respectivas juntas de lecho, el primero en dirección de $N_{,}$ a $M_{,}$, y el segundo en la de M'' a N''. El movimiento de la permutación *rrr* se indica en la Fig. 2 por medio de los tres trozos $M_{,,}N_{,}$, $N_{,}M'$ y $M'N''$ que se suponen obrando a un mismo tiempo con movimientos de rotación, y de forma que si el primer punto $M_{,,}$ de apoyo se considera como aquí en el intradós, el segundo $N_{,}$, debe estar en el extradós, el tercero M' en el intradós, y el cuarto N'' en el extradós. La Fig. 3 expresa el movimiento de la permutación *rrt*, y la Fig. 4 el movimiento de la siguiente *trr*: siendo de adver-tir que el trozo $M'N''$ en la Fig. 3, y el trozo $M_{,,}N_{,}$ en la Fig. 4 se consideran resbalando, el primero hacia el centro [6/7] del arco y el segundo en sentido contrario, porque de no admitir esta diferencia, los dos casos estarían acompañados de unas mismas circunstancias, y las permutaciones *rrt* y *trr* vendrían en substancia a expresar una sola especie de movimiento, pudiendo dar dos distintas. En las Figs. 5 y 6 se ven respectivamente los movimientos dimanados de las permutaciones *tr*, y *rt*, con la misma diferencia que hemos hecho notar en las dos figuras anteriores por lo que respecta a la dirección en el movimiento de los trozos que resbalan, y por razones idénticas a las dadas en aquel caso. Finalmente, el movimiento deducido de la última permutación *trt* se manifiesta en la Fig. 7 por los

trozos $M_{u}N_{\iota}$, $N_{\iota}M'$ y $M'N''$, de los cuales el primero y tercero resbalan por sus juntas respectivas de lecho en direcciones opuestas, y el segundo gira apoyado en los puntos N_{ι} y M' comunes a las juntas de este trozo y a las superiores de los otros dos. Estas son en resumen las siete especies de movimientos que deben evitarse en las bóvedas, hallando un número igual de condiciones que se dirijan a conseguir dicho objeto; pero antes de entrar en esta investigación, y a fin de entendernos y explicarnos más expeditamente, llamaremos desde aquí adelante movimientos puros de traslación y rotación a los expresados por las Figs. 1 y 2, y a los cinco restante, movimientos mixtos de primera, segunda, tercera, cuarta y quinta especies, según el orden que guardan entre sí las Figs. 3, 4, 5, 6 y 7 que los representan. Así que dividiremos esta obra en cuatro capítulos: en el primero y segundo hallaremos y discutiremos respectivamente las condiciones con las que se evitan los movimientos puros de traslación y de rotación: en el tercero, las correspondientes a los cinco movimientos mixtos; y vista la complicación que conservan todas las siete condiciones generales cuando los arcos no son simétricos, las reduciremos a otras más sencillas, y de mas fácil discusión, valiéndonos [7/8] para conseguir esto de una reflexión que haremos muy admisible, porque favorece la solidez sin desviarnos más que lo preciso de la exactitud. Últimamente, en el capítulo cuarto aplicaremos la doctrina expuesta en los anteriores a la investigación del grueso que deben tener los estribos, suponiéndolos compuestos de diferentes piezas que representan los sillares, tal cual se verifica en la práctica, y no formados de un solo trozo de piedra según lo han hecho hasta aquí todos los Autores: diferencia que produce una alteración notabilísima en los cálculos conforme veremos.

Interesando a la práctica que las bóvedas tengan una robustez capaz de resistir a los accidentes a que están comúnmente sujetas por su destino, y siendo imposible conseguir esta apreciable circunstancia, dándolas la figura que exige el estado de equilibrio perfecto; en estas investigaciones hemos de dirigirnos principalmente a que la resistencia que opone un trozo cualquiera para moverse, sea siempre mayor que la fuerza que lo solicita haciendo veces de potencia; y en este concepto las siete fórmulas arriba dichas no deben hallarse en forma de ecuaciones, sino de condiciones cuyos miembros se vean separados por uno de los signos conocidos de desigualdad. De este modo, determinada la figura del arco, eligiendo

la más apta para desempeñar el objeto propuesto en su construcción, podemos fácilmente hacer que la bóveda satisfaga las condiciones establecidas por la teórica, ya aumentando o ya disminuyendo, según convenga, algunas de sus dimensiones, sin vernos en la precisión, para conseguir esto, de que el intradós ni extradós formen otras curvas diferentes de las proyectadas, como sería preciso hacer que las formasen, si nos redujéramos a tratar exclusivamente del equilibrio, porque en él, en vez de condiciones, tendríamos solamente ecuaciones que, como se sabe, dan valor fijo y determinado a las cantidades. Además, pudiéndose abrir los arcos por tantas partes diferentes, cuantas son sus juntas de lecho, para estar seguros de que aquellas condiciones se verifican en toda la extensión de la bóveda, debemos referirnos a aquella posición de trozos más poderosa para [8/9] hacerlos volcar, pues claro está que si el movimiento no se verifica considerados los trozos más dispuestos a moverse, menos se verificará con cualesquiera otros: de donde se deduce que la discusión de las fórmulas en cuestión debe finalizarse determinando las variables que contienen, por medio de la doctrina de máximos y mínimos, y no valiéndose, como se ha hecho comúnmente, de observaciones prácticas que sólo tienen lugar cuando más en arcos exactamente semejantes a los que las suministraron.

Enterados de todo cuanto dejamos dicho, nos fuera ya fácil dar una justa idea del mérito de las mejores obras que hay escritas sobre el empuje de bóvedas, haciendo relación al plan que sus Autores debían haber seguido para que sus cálculos presentasen aplicaciones útiles a la práctica. Veríamos que M. Coulomb la hubiera desempeñado mejor que ningún otro, si establecidos los problemas con mayor generalidad y resueltos en mayor número, no hubiera confundido en una sola las dos fuerzas horizontales dimanadas de considerar un trozo, ya como potencia, o ya como resistencia: suposiciones que hacen se diferencien entre sí aquellas fuerzas, constantemente en los movimientos de rotación, y en los de traslación cuando se introduce el rozamiento. Con respecto a M. Bossut observaríamos que dirigiéndose principalmente a establecer en las bóvedas el equilibrio de traslación, la mayor parte de sus fórmulas vienen a ser meras especulaciones de cálculo; y solamente el problema que resuelve para hallar el grueso de machones, podría ser útil en algún caso al arte de construir, si hubiera considerado el trozo superior que produce el empuje, con movimiento de rotación en lugar del

de traslación que nunca o rarísima vez se verifica en la práctica. Finalmente, observando, que de todas las demás obras escritas sobre el asunto, se puede con corta diferencia formar el mismo juicio que acabamos de hacer de la de M. Bossut, pasaríamos después de este examen a notar los muchos errores [9/10] que se han padecido en el modo de descomponer las fuerzas, y en la admisión de ciertas hipótesis; pero nos contentaremos sólo con manifestar los más principales en el fondo de la obra, cuando la materia que se discuta tenga relación con ellos, y concluiremos ya esta introducción satisfaciendo a dos reparos que pueden proponerse.

El primero es, que supuesto introducimos en esta teórica el efecto del rozamiento, por la misma razón parece que debía también introducirse el de la coherencia del mortero interpuesto entre las juntas de lecho de las dovelas, a lo cual contestaré que prescindimos de la fuerza de coherencia, por ser insensible o casi nula cuando el mortero se halla blando, esto es, recién construidos los arcos: tiempo, al cual deben referirse nuestras fórmulas, por ser la época en que aquellos corren más riesgo de arruinarse. Y que contamos con el efecto de la fricción, porque el objeto de dar a las bóvedas un estado más firme y permanente que el del equilibrio, no puede conseguirse, según veremos más adelante, si no se admite una fuerza pasiva, cual es el rozamiento, que obrando sólo como resistencia sofoque el movimiento que intentan producir las activas que son en nuestro caso los pesos de las dovelas.

El segundo reparo se dirige a que en la numeración hecha de todos los diversos movimientos que pueden ocasionar la ruina de las bóvedas, no se hace mención de aquel que proviene de no tener la materia con que está edificado el arco, la suficiente consistencia para resistir las presiones que se hacen recíprocamente las dovelas; y aunque es verdad que esta objeción no carece a primera vista de fundamento, como por otra parte los experimentos hechos para conocer y medir la dureza de las piedras, dan unos resultados sumamente favorables a la práctica, podemos muy bien desentendernos [10/11] de calcular si las dovelas, pilares y demás partes del arco tienen la suficiente robustez para aguantar sin desmoronarse a las presiones que sufren, seguros de que la tendrán, mientras sus dimensiones, por pequeñas que parezcan con relación a este objeto, guarden las proporciones que exigen las demás consideraciones que llevamos mencionadas en los artículos anteriores.

Capítulo primero

De las condiciones necesarias para evitar los movimientos puros de traslación

1. Con el fin de dar a estas investigaciones toda la extensión posible, prescindimos que las bóvedas sean de cañón seguido o de media naranja, y que las juntas de lecho tengan una dirección determinada; pero supondremos infinito el número de estas juntas en todos los arcos, para que así estén sujetas a la ley de continuidad las fórmulas que deduzcamos, y la bóveda se considere con mas partes aptas por donde pueda abrirse que juntas tiene en su estado verdadero: lo que es una circunstancia que se dirige a favorecer más la solidez.

2. Para concebir en las medias naranjas los siete movimientos expresados en la introducción con la misma facilidad que en las bóvedas de cañón seguido, supondremos aquellas cortadas por una infinidad de planos que pasando por el eje de revolución formen entre sí ángulos infinitamente pequeños; y de esta suerte, considerando cada sección de las que resultan como una bóveda aislada en donde pueden ya muy bien verificarse dichos movimientos, reduciremos el examen de las medias naranjas al de una sección suya acompañada de las circunstancias referidas.

3. Las fuerzas que introducimos en estos cálculos son constantemente pesos de trozos de bóveda; y los pesos midiéndose por el producto de los tres factores, gravedad, densidad y volumen de los cuerpos a quienes pertenecen, pueden ser reemplazados por dicho producto, con lo cual las fórmulas en que se haya hecho

esta sustitución, aparecerán, en el supuesto de ser homogénea la bóveda, divisibles por los dos primeros factores, y quedarán después de efectuada la división, de la misma forma que si por los pesos se hubieran sustituido desde luego los volúmenes. Así, por el peso o fuerza de un trozo entenderemos [12/13] generalmente su volumen, siempre que no se advierta si la bóveda es de cañón seguido o de media naranja; pero si se supone lo primero, entonces por el peso de un trozo entendemos sólo la superficie o cara que presenta en el alzado: porque en este caso de los dos factores, el ancho de la bóveda y dicha superficie, cuyo producto mide el volumen del trozo en cuestión, el primero es común a todos los trozos de la bóveda.

4. Antes de entrar a hablar del movimiento puro de traslación que es el objeto de este capítulo, haremos algunas advertencias preliminares que nos ahorraran en lo sucesivo muchas digresiones. Dijimos en la introducción, por las razones allí expuestas, que eran imposibles los movimientos deducidos de las tres permutaciones *t*, *r*, *rr*; pero si ahora nos desentendemos de toda consideración particular para hallar analíticamente hasta las más claras y evidentes propiedades que deben gozar los arcos, encontraremos ser necesario a fin de que los movimientos de las tres permutaciones dichas no tengan lugar:

1.º que las juntas de lecho: $M_{u}N_{u}$, $M_{\iota}N_{\iota}$, etc. (Fig. 18) sean convergentes desde la parte del extradós hacia la del intradós, formando además con la vertical ángulos $M_{u}R_{u}A$, $M_{\iota}R_{\iota}A$, etc. menores que el recto.

2.º que la vertical que pasa por el centro de gravedad de un trozo $M''N''N'M'$ cualquiera, caiga entre los puntos M'' y N'' de su junta, o entre el punto M'' y el claro del intradós; pero de ninguna manera más allá del punto N'' hacia la parte de afuera del extradós.

3.º que sea siempre menor que dos rectos el ángulo $M_{u}N_{\iota}M'$ formado en un punto cualquiera del extradós por dos rectas tiradas desde este punto a otros dos M_{u} y M' del intradós.

4.º y último, que toda línea $M'N_{\iota}r$ tirada desde un punto del intradós forme un ángulo $M'rR_{u}$ menor que el recto con la junta $M_{u}N_{u}$ que encuentra siguiendo aquella dirección, o con su prolongación $M_{u}r$. Y puesto que las bóvedas en quienes no se verifican estas cuatro condiciones, han de venir

necesariamente abajo por su propio peso, como es fácil inferir a la simple vista, sólo consideraremos aquí las que satisfagan en toda su extensión a las condiciones [13/14] referidas, pues claro está que semejantes bóvedas son las que únicamente deben emplearse en la construcción, y por consiguiente sujetarse al examen de si pueden o no mantenerse en pie.

5. En las bóvedas simétricas se llama clave aquella dovela que se halla en medio de las demás, y viene siempre a estar en el punto más alto de la curva interior: supongamos aquí, generalizando esta última propiedad, que clave es, sean o no simétricas las bóvedas, aquella dovela que está situada en el punto más elevado de la curva intradós, y hagamos pasar por este punto los ejes vertical y horizontal de las coordenadas correspondientes a las curvas interior y exterior. Esto supuesto, y para desembarazarnos de digresiones que pueden evitarse desde el principio, pondremos aquí juntas todas las denominaciones de aquellas cantidades cuyo uso es más frecuente en este capítulo y siguientes, llamando constantemente (véanse las Figs. 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7);

Los trozos $AM'N'B$, $AM''N''B$, $AM_{\iota}N_{\iota}B$, $AM_{u}N_{u}B$,	. . . M', M'', M_{ι}, M_{u}.
Las ordenadas de los puntos M', M'', M_{ι}, M_{u} del intradós	. . . y', y'', y_{ι}, y_{u}.
Las abscisas correspondientes, contadas desde el punto A inferior de la clave,	. . . x', x'', x_{ι}, x_{u}.
Las ordenadas de los puntos N', N'', N_{ι}, N_{u} del extradós	. . . u', u'', u_{ι}, u_{u}.
Las abscisas respectivas a estos puntos, contadas también desde el mismo punto A	. . . z', z'', z_{ι}, z_{u}.
Las distancias de los puntos M', M'', M_{ι}, M_{u}, a las verticales que pasan por los centros de gravedad de los trozos $AM'N'B$, $AM''N''B$, $AM_{\iota}N_{\iota}B$, $AM_{u}N_{u}B$	. . . X', X'', X_{ι}, X_{u}.
Las distancias de estas mismas verticales a los puntos N', N'', N_{ι}, N_{u}	. . . Z', Z'', Z_{ι}, Z_{u}.

Los ángulos que forman las juntas de lecho $M'N'$, $M''N''$,
$M_{\iota}N_{\iota}$, $M_{\iota\iota}N_{\iota\iota}$ de dichos trozos con la vertical . . . α', α'', α_{ι}, $\alpha_{\iota\iota}$.

La altura AB de la clave . . . K.

Y el ángulo llamado de rozamiento, suponiéndolo constante [14/15] según lo acredita la experiencia . . . f.

6. Teniendo presentes estas denominaciones, empecemos ya a considerar el movimiento puro de traslación de los trozos $M''N'$ y $N'M_{\iota}$ (Fig. 1), que es el caso general que comprende a todos los demás de la misma especie. Para esto desde un punto cualquiera φ de la vertical que pasa por el centro de inercia del trozo $M_{\iota}N' = M' + M_{\iota}$, descompongamos el peso de este trozo en dos F' y F_{ι}, que dirigiéndose respectivamente hacia las juntas $M'N'$ y $M_{\iota}N_{\iota}$ formen con su resultante los ángulos λ' y λ_{ι}: la fuerza

$$F' = \frac{(M' + M_{\iota})\,\text{sen}\lambda_{\iota}}{\text{sen}(\lambda' + \lambda_{\iota})}$$

en dos, la primera perpendicular y la segunda paralela a la junta inferior $M''N''$ del trozo $M''N'$; con lo cual $F'\ \text{sen}(180^{\circ} - \lambda' - \alpha'')$ será la primera componente, y $F'\ \cos(180^{\circ} - \lambda' - \alpha'')$ la segunda: de consiguiente

$$F'\ \cos(180^{\circ} - \lambda' - \alpha'') - F'\ \text{tang}f\ \text{sen}(180^{\circ} - \lambda' - \alpha'') \text{ o su igual}$$

$$\frac{(M' + M_{\iota})\,\text{sen}\lambda_{\iota}}{\cos f\,\text{sen}(\lambda' + \lambda_{\iota})}\{\text{sen}\lambda'\,\text{sen}(\alpha'' - f) - \cos\lambda'\cos(\alpha'' - f)\} \qquad (1)$$

expresará el esfuerzo con que el trozo $M_{\iota}N'$ intenta hacer resbalar el segundo $N'M''$ por su junta inferior de lecho en la dirección de M'' a N''.

7. Puesto que los trozos $M_{\iota}N'$ y $M''N'$ están de tal suerte ligados entre sí, que el uno no puede moverse sin hacer otro tanto el otro; no basta para que se efectúe el movimiento en ambos, que el primero venza la resistencia que opone el segundo a lo largo de la junta $M''N''$, sino que es necesario también que quede al mismo tiempo destruida la fuerza que produce la fricción en las juntas $M'N'$ y $M_{\iota}N_{\iota}$. Pero la experiencia acredita que una fuerza que impele a un cuerpo sostenido por

un plano, no empieza a producir efecto, sino hasta tanto que el ángulo formado por la fuerza y el plano, es menor que el complemento del ángulo de rozamiento; y es fácil inferir de aquí que para satisfacer a la última circunstancia, debe hacerse $\lambda' < 90^\circ - f - \alpha'$, $\lambda_{\iota} < 90^\circ - f - \alpha_{\iota}$.

8. Por otra parte, siendo el objeto de la cuestión ver si el trozo $M'N_{\iota}$ consigue llevar delante [15/16] de sí al trozo $M'N''$, debemos considerar el empuje mayor que aquél puede producir contra éste, quiero decir, el mayor valor de que es capaz la cantidad (1), haciendo variar convenientemente las indeterminadas λ' y λ_{ι}. Dicha cantidad (1), examinada bajo la forma

$$\frac{(M' + M_{\iota}) \cos(\alpha'' - f)}{\cos f} \left\{ \frac{\mathrm{tang}(\alpha'' - f) - \cot \lambda'}{\cot \lambda' + \cot \lambda_{\iota}} \right\},$$

crece palpablemente a medida que $\cot \lambda_{\iota}$ es menor: y para ver que la sucede otro tanto a medida que $\cot \lambda'$ es también menor, no hay más que ponerla bajo esta otra forma:

$$\frac{(M' + M_{\iota}) \cos(\alpha'' - f)}{\cos f} \left\{ \frac{\mathrm{tang}(\alpha'' - f) + \cot \lambda_{\iota}}{\cot \lambda_{\iota} + \cot \lambda'} - 1 \right\};$$

pero $\cot \lambda_{\iota}$ y $\cot \lambda'$ disminuyen al paso que los ángulos λ_{ι} y λ' son mayores, y como estos ángulos no pueden pasar de los límites que les hemos prescrito en el número anterior; para satisfacer, pues, al objeto de la cuestión en todo lo que permiten dichos límites, será preciso hacer en la cantidad (1) $\lambda' = 90^\circ - \alpha' - f$, $\lambda_{\iota} = 90^\circ - \alpha_{\iota} - f$; y tendremos por fin la expresión

$$\frac{(M' + M_{\iota}) \cos(\alpha_{\iota} + f)}{\cos f \,\mathrm{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\iota} + f)} \{\mathrm{sen}(\alpha'' - f) \cos(\alpha' + f) - \cos(\alpha'' - f) \,\mathrm{sen}(\alpha' + f)\},$$

o bien su equivalente

$$\frac{(M' + M_{\iota}) \cos(\alpha_{\iota} + f) \,\mathrm{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)}{\cos f \,\mathrm{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\iota} + f)} \qquad (2)$$

para indicar el esfuerzo mayor que puede suponerse en el trozo $M_{\prime}N'$ para empujar al inferior en la dirección de su base, teniendo en consideración el rozamiento, y su verdadero modo de obrar. Restada la cantidad (2) de $(M'' - M') \cos(\alpha'' - f) / \cos f$ que expresa la resistencia que opone el trozo $M''N' = M'' - M'$ para moverse en la dirección de M'' a N'', sacaremos la condición

$$(M'' - M'') \cos(\alpha'' - f) - \frac{(M' + M_{\prime}) \cos(\alpha_{\prime} + f) \operatorname{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)}{\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\prime} + f)} \geq 0, \quad (3)$$

que evitará el movimiento puro de traslación, siempre que quede satisfecha refiriendo los ángulos α'', α', $\alpha_{\prime}$, y por consiguiente sus dependientes M'', M', $M_{\prime}$, a todas las juntas de lecho. Empleamos el doble signo ≥ 0 para indicar que la cantidad [16/17] que le precede debe ser positiva, o a lo menos igual a cero.

9. Nosotros hemos venido, por final de todas las reflexiones hechas, a descomponer el peso $M' + M_{\prime}$ en dos fuerzas que forman respectivamente con las juntas $M'N'$ y $M_{\prime}N_{\prime}$ (Fig. 1) ángulos iguales al complemento de f; pero si en vez de esta descomposición, empleásemos la que comúnmente se sigue en la resolución de los problemas de Mecánica cuando se introduce el rozamiento, o lo que es lo mismo, la que se deduce del proceder empleado ordinariamente para ponerlos en ecuación, sacaríamos otra fórmula distinta de la que acabamos de hallar. En efecto, consistiendo aquel método en considerar el rozamiento como una verdadera fuerza activa que obra paralelamente al plano en que se produce; si nosotros descomponemos el peso $M' + M_{\prime}$, modificado por la fricción, en dos fuerzas P' y $P_{\prime}$ perpendiculares a las juntas $M'N'$ y $M_{\prime}N_{\prime}$, la resultante de las cuatro P', $P' \operatorname{tang} f$, $P_{\prime}$, $P_{\prime} \operatorname{tang} f$, debe ser igual a $M' + M_{\prime}$. Halladas de este modo las incógnitas P' y $P_{\prime}$, tendremos

$$P' = \frac{(M' + M_{\prime}) \cos f \cos(\alpha_{\prime} + f)}{\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\prime} + f)},$$

$$P_{\prime} = \frac{(M' + M_{\prime}) \cos f \cos(\alpha' + f)}{\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\prime} + f)};$$

y descomponiendo la primera, que es la sola que ocasiona el empuje contra el trozo $M'N''$, en dos, una perpendicular y otra paralela a la junta $M''N''$, la presión que sufre esta junta será $= P'\cos(\alpha'' - \alpha') + (M'' - M')\text{sen}\,\alpha''$, y la fuerza que queda al trozo $M'N''$ en dirección de M'' a N'', sin contar con el rozamiento producido en la junta $M''N''$, $= P'\text{sen}(\alpha'' - \alpha') - (M'' - M')\cos\alpha''$: restando esta expresión de la anterior multiplicada por tang f, y reduciendo al mismo tiempo, pararemos en la condición

$$(M''-M')\cos(\alpha''-f) - \frac{(M'+M_{\iota})\cos f\cos(\alpha_{\iota}+f)\,\text{sen}(\alpha''-f-\alpha')}{\text{sen}(\alpha'+f+\alpha_{\iota}+f)} \geq 0 \qquad (4)$$

que, como se ve, es diversa de la sacada en el número 8.

10. Aunque la condición (3) no necesita de más apología que la sencilla exposición de los raciocinios empleados para deducirla, y por otra parte la ilegitimidad [17/18] de la (4) queda bastantemente probada con sólo tener presente que el rozamiento, no siendo más que un puro obstáculo que se opone al movimiento, es incapaz de descomponerse del mismo modo que una fuerza activa, pues sin las consideraciones que suministra la idea de movimiento dejaría de existir el teorema del paralelogramo de fuerzas; sin embargo, para mayor convencimiento, aplicaremos uno y otro método a un caso, cuyo resultado se sepa ya de antemano y con toda evidencia. Hemos dicho que la presión de la junta $M''N''$ es igual por el último método a

$$P'\cos(\alpha''-\alpha') + (M''-M')\,\text{sen}\,\alpha'' =$$

$$= \frac{(M'+M_{\iota})\cos f\cos(\alpha_{\iota}+f)\cos(\alpha''-\alpha')}{\text{sen}(\alpha'+f+\alpha_{\iota}+f)} + (M''-M')\,\text{sen}\,\alpha'',$$

y podemos fácilmente hallar que por el nuestro sale igual a

$$F'\cos(\alpha''-\alpha'-f) + (M''-M')\,\text{sen}\,\alpha'' =$$

$$= \frac{(M'+M_{\iota})\cos(\alpha_{\iota}+f)\cos(\alpha''-\alpha'-f)}{\text{sen}(\alpha'+f+\alpha_{\iota}+f)} + (M'-M_{\iota})\,\text{sen}\,\alpha''.$$

Supongamos ahora que estas dos expresiones se refieren a una bóveda simétrica en la que se hace $M' = M_\iota$, $\alpha' = \alpha_\iota$ y $\alpha'' = 90^\circ$: la primera se convertirá con estas sustituciones en

$$M'' - \frac{M' \cos \alpha' \operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}(\alpha' + f)},$$

y la segunda simplemente en M''; y como la presión que experimenta una base horizontal, debe ser precisamente igual al peso que sostiene ésta, sea grande, pequeño o nulo el rozamiento, se infiere que el resultado deducido de nuestra descomposición es tan consiguiente a la verdad de la proposición que acabamos de mencionar, como falso y erróneo el que sale de la expresión

$$M'' - \frac{M' \cos \alpha' \operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}(\alpha' + f)}$$

dada por el método común.

11. En la investigación de la condición (3) pudiéramos haber descompuesto inmediatamente el trozo $M' + M_\iota$ en dos fuerzas que formasen con sus respectivas juntas el ángulo de $90^\circ - f$, sin que por eso debiese parecer extraña esta descomposición, puesto que las mismas razones que obligan a tirar las componentes perpendiculares a las juntas cuando se prescinde del rozamiento, están de parte de la otra descomposición cuando se le quiere considerar.

Sin embargo, nos ha parecido más conveniente el no dar desde luego semejante dirección a las componentes de $M' + M_\iota$, primeramente porque este proceder, siendo al fin nuevo, exigía estar apoyado en razones que lo sostuvieran, [18/19] y en segundo lugar porque en esta teórica nos hemos propuesto la idea de plantear los problemas con todas las indeterminaciones que presenta la descomposición de una fuerza en otras dos, para hacer desaparecer después estas indeterminadas por consideraciones propias del objeto principal que se lleva en ellos, sin intervención de arbitrariedad ninguna sustancial que influya en los resultados. Esta advertencia parecerá mucho más interesante de hacer, cuando se note que del olvido total de ella proviene principalmente la diversidad de resultados que se observa en la reso-

lución de unos mismos problemas, según son los Autores que los tratan. Couplet y Prony, al determinar el empuje que hace el Arco contra los estribos en el concepto de girar éstos alrededor del punto exterior de sus bases, dirigen las fuerzas en que descomponen el peso de la parte superior de la bóveda, por medio de sus juntas de lecho; y Taramas, Rondelet y otros consideran a estas mismas fuerzas con direcciones diferentes, haciéndolas pasar por el centro de gravedad de la resultante, esto es del peso descompuesto. Ambos procedimientos, además de dar a la componente que produce el empuje, momentos diferentes entre sí y del que debe realmente tener, son enteramente arbitrarios y en ninguna manera aplicables al problema que se intenta resolver, conforme manifestaremos claramente en el nº 51, que es en donde con más particularidad toca tratar de este punto.

12. Volviendo la vista a la condición (3), trataremos de darla una forma más cómoda para las aplicaciones que haremos de ella; pero antes de esto, es preciso notar que en una expresión que indica la desigualdad de dos cantidades, no sucede lo que en una ecuación [19/20] que puede multiplicarse y dividirse por cualesquiera cantidades sin que se altere en nada la igualación. Para hacer estas operaciones en fórmulas parecidas a la condición (3), es preciso que la cantidad por quien se van a dividir o multiplicar sus miembros sea constantemente positiva, porque de lo contrario, transformándose los signos positivos en negativos y los negativos en positivos, la fórmula aparecerá, después de efectuada la operación, convertida en otra diametralmente opuesta a lo que debe expresar.

Así, pues, no olvidando esta advertencia, pasemos a multiplicar la condición (3) por $\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_\iota + f)$, que por lo que diremos en el número próximo ha de suponerse acompañado del signo positivo, y quedará transformada en

$$a'M'' - b'M' - c'M_\iota \geq 0 \qquad \text{(A)}$$

haciendo para mayor comodidad

$$\left.\begin{aligned} a' &= \cos(\alpha'' - f)\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_\iota + f),\\ b' &= \cos(\alpha' + f)\operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_\iota) = a' + c',\\ c' &= \cos(\alpha_\iota + f)\operatorname{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

13. El método directo de discutir la condición (A) sería hallar por medio de la diferenciación los valores de α'', α' y α_ι, que convierten en un máximo a su primer miembro, y luego ver si con esta sustitución salía positiva la cantidad $a'M'' - b'M' - c'M_\iota$; pero empleando semejante proceder, resultarían cálculos muy largos y complicados por la mezcla que hay de cantidades algebraicas con trascendentes, y no hallarse además separadas las variables α'', α' y α_ι. Para remediar en parte este último inconveniente, advertiremos que existiendo entre los coeficientes a', b' y c' la relación

$$a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f) - b' \operatorname{tang}(\alpha' + f) - c' \operatorname{tang}(\alpha_\iota + f) = 0, \qquad (6)$$

si despejamos de aquí el valor de a' y lo sustituimos en la ecuación (A), se podrá ésta poner, después de dividir por $\operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_\iota) \operatorname{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)$, bajo la forma siguiente: [20/21]

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen}(\alpha' + f)}{\operatorname{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)}\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f)\} + \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(\alpha_\iota + f)}{\operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_\iota)}\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M_\iota \cot(\alpha_\iota + f)\} \geq 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

en donde vemos ser el primer término función de las dos variables α'' y α', y el segundo de α'' y α_ι. Referiremos, pues, la letra M'' al trozo contado desde la clave hasta uno de los dos arranques, porque comúnmente son éstos los parajes más expuestos del arco: con lo cual, quedando ya los dos términos de la condición (7) funciones de una sola variable cada uno, sus respectivos mínimos podrán expeditamente hallarse, o por la diferenciación, o por tanteos dando a α' y α_ι diferentes valores: si la suma de estos mínimos es positiva, ya se empiecen a contar los trozos M'', M' y M_ι desde el arranque izquierdo al derecho, o ya desde el derecho al izquierdo como se supone en la Figura 1ª, concluiremos de este cálculo que el movimiento puro de traslación no tiene de modo alguno lugar en la bóveda. Se ha de evitar el considerar en todas estas sustituciones y tanteos aquellos valores de α'', α' y α_ι que hagan negativas las cantidades $\alpha'' - f - \alpha' - f$, $90^\circ - \alpha' - f$,

$90^{\circ} - \alpha_{\iota} - f$, porque si éstas lo son, lo serán también la fuerza F' y el empuje que el trozo $M' + M_{\iota}$ produce contra el inferior $M'' - M'$; y de consiguiente imposible que este último trozo pueda resbalar en la dirección de M'' a N''; y absolutamente ocioso el sustituir tales valores de α'', α' y α_{ι} en la condición (7) para averiguar lo que ya se sabe de cierto.

14. Una vez que para la discusión de la condición (A) o su igual (7) deben considerarse solamente los valores positivos de $\alpha'' - f - \alpha' - f$, $90^{\circ} - \alpha' - f$, $90^{\circ} - \alpha_{\iota} - f$, es fácil demostrar con esto y teniendo presente la primera condición del núm. 4, que $\text{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)$, $\cos(\alpha' + f)$, $\cos(\alpha_{\iota} + f)$ y $\text{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\iota} + f)$ han de resultar necesariamente acompañados del signo positivo, y de aquí inferir lo mismo con respecto a los coeficientes a', b' y c', puesto que el primero es el producto de $\cos(\alpha'' - f)$ y $\text{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\iota} + f)$, el tercero de $\cos(\alpha_{\iota} + f)$ y $\text{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)$, y el segundo igual a la suma de estos dos productos. Nos detenemos en hacer todas estas advertencias para cumplir con lo que ofrecimos en el núm. 12, y además porque en suponer positivas las cantidades a', b' y c' estriba en gran parte lo que demostraremos [21/22] en el núm. 19.

15. De lo expuesto en el núm. 13 se infiere desde luego que las bóvedas en quienes no pueda resultar positiva la cantidad $\text{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)$ bajo ninguna junta de lecho, se hallan incapaces de adquirir el movimiento puro de traslación, aun cuando cargue sobre ellas un peso cualquiera. Para que $\text{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)$ esté acompañado necesariamente del signo negativo, sin pasar del límite que señalan los ángulos de arranque, es preciso que la suma de estos ángulos sea menor que el duplo del ángulo de rozamiento: porque $\alpha'' - \alpha' - 2f$ será indispensablemente negativa en todas las juntas contenidas entre los arranques, siempre que haciendo $\alpha'' = AR'C'$ y $-\alpha' = AR_{\iota}C_{\iota}$ (Fig. 20) que son sus mayores valores sea $AR'C' + AR_{\iota}C_{\iota} < 2f$. Se ve, pues, que los arcos escarzanos son los que únicamente pueden gozar de esta apreciable propiedad; sin embargo, entre los llamados Prácticos hay una cierta prevención contra esta especie de arcos. Aquí prescindimos del movimiento que pueden adquirir los machones en virtud del empuje que contra ellos producen las dovelas, porque de esto se tratará exclusivamente en el capítulo cuarto; pero si queremos también extender a los machones la consecuencia sacada, será necesario referir el ángulo α'' al que forman las bases de éstos con la vertical, y de consiguiente tener $AR_{\iota}C_{\iota} + AO'F' < 2f$, $AR'C' + AO_{\iota}F_{\iota} < 2f$:

condiciones que siendo $AO'F' = AO_{\iota}F_{\iota} = 90^{\circ}$, no pueden verificarse al menos que el rozamiento no sea extraordinariamente grande, o en su defecto se supongan dichas bases inclinadas lo suficiente al horizonte, según lo representan las líneas $F'e'$ y $F_{\iota}e_{\iota}$, y por lo tanto paralelas a estas líneas todas las hiladas de los sillares que forman los estribos.

16. Si el rozamiento no existiera, la condición (A) tendría la forma:

$$M'' \cos \alpha'' \operatorname{sen}(\alpha' + \alpha_{\iota}) - M' \cos \alpha' \operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_{\iota}) - M_{\iota} \cos \alpha_{\iota} \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha') \geq 0 \quad (8)$$

[22/23]

Como esta condición debe también verificarse empezando a contar los trozos M'', M' y M_{ι} por el lado izquierdo, si suponemos que $M_{\iota\iota}N_{\iota}$ y $N_{\iota}M'$ (Fig. 1ª) son los considerados en este caso, tendremos además de la condición (8) esta otra:

$$M'' \cos \alpha'' \operatorname{sen}(\alpha' + \alpha_{\iota}) - M' \cos \alpha' \operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_{\iota}) - M_{\iota} \cos \alpha_{\iota} \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha') \geq 0 \quad (8)$$

Considere ahora que los trozos $N_{\iota}M'$ y $M_{\iota\iota}N_{\iota}$ toman el primero la posición de $M''N'$, y el segundo la de $N_{\iota}M'$; con lo cual sustituyendo en la condición últi-ma M'' por M', M' por $-M_{\iota}$, y M_{ι} en vez de $M_{\iota\iota}$, saldrá

$$-M' \cos \alpha'' \operatorname{sen}(\alpha' + \alpha_{\iota}) + M' \cos \alpha' \operatorname{sen}(\alpha'' + \alpha_{\iota}) + M_{\iota} \cos \alpha_{\iota} \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha') \geq 0$$

que es la misma que la condición (8), cambiados los signos: luego estas dos condiciones no pueden verificarse simultáneamente como lo exige la cuestión, mientras no se tome en ambas el signo = de abajo: y de consiguiente, al no existir la fricción, sería imposible dar a las bóvedas otro estado mas permanente que el del perfecto equilibrio.

Este resultado prueba la incompatibilidad que hay de conseguir lo que pretende M. Bouguer en su memoria del año 1734, cuyo objeto se reduce a averiguar las curvas más aptas que deben formar las medias naranjas para que sus dovelas tengan, prescindiendo del rozamiento, una estabilidad capaz de resistir a otros esfuerzos extraños, además de los puramente dimanados de su mutuo empuje. La razón porque M. Bouguer no se encuentra con este inconveniente al desenvolver sus cálculos proviene de suponer el trozo superior de los dos que considera, ha-

ciendo solamente veces de potencia, y el inferior de resistencia; siendo así que debía igualmente discutir el caso contrario, lo que nosotros hemos venido a hacer cuando en la condición segunda de este número pusimos respectivamente M'', $-M'$ y $M_{\prime}$ en lugar de M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$. Es verdad que este autor advierte al principio de su memoria que en las bóvedas de media naranja no puede verificarse hacia el centro del arco el movimiento [23/24] de traslación del trozo inferior, en atención a la convergencia que tienen los planos de sus dos lechos verticales, los cuales no son paralelos entre sí como en las bóvedas de cañón seguido, sino que parten todos del eje de revolución.

Pero esta razón no es suficiente para suponer del todo imposible dicho movimiento, porque realmente el obstáculo que un trozo cualquiera encuentra en una media naranja cerrada para moverse acercándose hacia el eje, o sea vertical que pasa por el centro del arco, subsiste sólo en el concepto de estar las juntas formadas por los planos verticales que salen del eje, perfectamente ajustadas unas con otras, y de ser verdaderamente impenetrable la materia de que se forman; y bien se ve que el mortero interpuesto entre ellas, fácil de ceder a presiones muy cortas si no ha llegado a su debida consistencia, y la poca longitud o vasta que regularmente tienen las dovelas en esta especie de bóvedas, son dos elementos muy poco o nada a propósito para que se verifiquen rigurosamente tales condiciones.

Así es que el modo de considerar las medias-naranjas según establecimos en el núm. 2, esto es, cada sección suya como independiente y separada de las otras, además de ser el más sencillo, tiene en su apoyo todo lo que acabamos de decir, y produce ventajas reales a la solidez, porque supone y examina las medias-naranjas en el estado de su mayor debilidad posible.

17. Para saber de qué propiedad deben gozar las bóvedas, a fin de que no se vengan abajo, suponiendo nulo el rozamiento según se ha dicho en el número anterior, transformaremos la ecuación (8) en esta otra

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha''-\alpha')}\{M''\cot\alpha''-M'\cot\alpha'\}+ \\ +\frac{\operatorname{sen}\alpha_{\prime}}{\operatorname{sen}(\alpha''+\alpha_{\prime})}\{M''\cot\alpha''-M_{\prime}\cot\alpha_{\prime}\}=0, \quad (9)$$

siguiendo el mismo proceder empleado en el nº 15 para dar a la condición (A) la forma (7); y de este modo vemos claramente que debiendo [24/25] verificarse la ecuación (9) bajo los infinitos valores que pueden tener las variables α'', α' y α_{ι}, enteramente independientes unos de otros, será necesario hacer para que así suceda, $M''\cot\alpha'' = M'\cot\alpha' = M_{\iota}\cot\alpha_{\iota} =$ *constante*: esto es, tener en todas las juntas de lecho la ecuación

$$M = A \text{ tang } \alpha, \qquad (10)$$

siendo A una constante en toda la extensión de la bóveda, M un trozo cualquiera contado desde la clave, y α el ángulo que su junta inferior de lecho forma con la vertical. Esta ecuación se halla bajo diferentes formas en casi todas las obras que tratan del empuje de bóvedas, y parece que el objeto principal de sus Autores no ha sido otro que el darla a conocer, como si en ella sólo estribara todo el fundamento de la Teórica, siendo así que es la más inútil por las razones que vamos a dar. Primero, porque aunque es verdad que satisfecha la ecuación (10) quedan impedidos todos los movimientos puros de traslación, cualquiera que sea la magnitud del rozamiento; no por eso se logra que las bóvedas dejen de adquirir otros de distinta especie, como sucede a la bóveda adintelada que es una de las más expuestas a venirse abajo tomando el movimiento mixto de primera especie, conforme veremos en el capítulo tercero, no obstante de cumplir con la ecuación (10) en toda la extensión de sus juntas. Segundo, porque aun dado caso que con impedir el movimiento puro de traslación de la manera que prescribe la ecuación (10), quedaran de hecho sofocados todos los demás, nos veríamos imposibilitados de hacerla cumplir en toda la extensión del arco, cuando las juntas del arranque fueran horizontales, pues entonces la superficie de la bóveda debía ser infinita siéndolo la tangente del [25/26] ángulo recto. Tercero y último, porque el querer hacer que la magnitud de los trozos siga la razón de las tangentes de los ángulos de sus juntas, quita la facultad que hay de poder disponer a un mismo tiempo de las dos curvas intradós y extradós: circunstancia que, atendida la trascendencia que puede tener en la práctica, es por sí sola suficiente para resolvernos a no emplear jamás semejante ecuación. Sin embargo de lo dicho, haremos una aplicación de ella, y esto tan sólo porque nos dará a conocer anticipadamente

dos curvas de propiedades muy apreciables por lo que diremos en el Capítulo segundo.

18. Supongamos que siendo todas las dovelas de un grueso igual e infinitamente pequeño, y las juntas de lecho perpendiculares a la curva interior, se quiere averiguar la naturaleza de esta curva para que el arco satisfaga en todos sus puntos a la ecuación (10). Para esto se sustituirá dx/dy por tangente de α, y $K \int(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ ó $K \int y(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ por M, según que la bóveda sea de cañón seguido o media naranja, (véase nº 2); y tendremos en estos dos casos

$$A\frac{dx}{dy} = \int (dx^2 + dy^2)^{1/2},\ \frac{1}{2}A\frac{dx}{dy} = \int y(dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

y diferenciando en el supuesto de ser constante dy,

$$dy = \frac{Ad^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},\ 2ydy = \frac{Ad^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

cuyas integrales, ya completas, son

$$y = A\log\left(\frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\right),\ y^2 = A\log\left(\frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\right);$$

y de aquí, llamando e la base de los logaritmos hiperbólicos, se saca;

$$dx = \frac{1}{2}dye^{y:A} - \frac{1}{2}dye^{-y:A},\ dx = \frac{1}{2}dye^{yy:A} - \frac{1}{2}dye^{-yy:A}$$

Integradas segunda vez, la primera nos da completada

$$A + x = \frac{1}{2}Ae^{y:A} + \frac{1}{2}Ae^{-y:A},\ \text{o}\ y = A\log\left(\frac{A + x + \sqrt{2Ax + x^2}}{A}\right);$$

[26/27]

y la segunda, reducida a serie

$$x = \frac{y^3}{1 \cdot 3 \cdot A} + \frac{y^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot A^3} + \frac{y^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot A^5} + \&c.$$

Es fácil conocer, aplicando los principios de la máquina funicular, que la primera de las dos últimas ecuaciones corresponde a la curva que resulta de suspender por sus extremos a una cuerda uniforme e infinitamente delgada y flexible, y que la segunda ecuación se refiere a la curva que debe tomar un lienzo también infinitamente delgado y flexible, pero de una anchura tal, que desde los extremos vaya disminuyendo hasta el medio, y su proyección horizontal esté representada por dos rectas que formando un ángulo infinitamente pequeño, se crucen en el punto que corresponde verticalmente al vértice o punto más bajo del lienzo. Por esta razón llamaremos en adelante a la curva primera, catenaria plana o de cañón seguido, y a la segunda curva, catenaria de revolución o de media naranja.

19. Si la condición general (A) se refiere a bóvedas simétricas, se podrá hacer $M_, = M'$ al mismo tiempo que $\alpha_, = \alpha'$, ó $M' = -M''$ y de consiguiente $\alpha' = -\alpha''$. En el primer caso la condición (A) se convierte en:

$$M'' \cos(\alpha'' - f) \operatorname{sen}(\alpha' + f) - M' \cos(\alpha' + f) \operatorname{sen}(\alpha'' - f) \geq 0,$$

debiendo ser los valores que se sustituyan por M'' mayores que los de M'.
En el segundo caso, la misma condición (A) toma la forma:

$$M'' \cos(\alpha'' - f) \operatorname{sen}(\alpha_, + f) - M_, \cos(\alpha_, + f) \operatorname{sen}(\alpha'' - f) \geq 0,$$

en la cual han de ser los valores de M'' menores que los de $M_,$.

Observando ahora que esta condición resulta idéntica a la otra con sólo variar las letras $M_,$ y $\alpha_,$ en M' y α', es claro que dará lo mismo tener las dos condiciones que una sola, con tal que en [27/28] esta última suposición los valores de M'' no tengan ya la sujeción de antes, esto es, pueda hacerse indistintamente M'' mayor o menor que M'; y por lo tanto consideraremos a fin de separar unas de otras las variables independientes para ambos casos la condición primera que dividida por $\operatorname{sen}(\alpha' + f) \operatorname{sen}(\alpha'' - f)$, se reduce a:

$$M''\cot(\alpha''-f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0: \qquad \text{(B)}$$

donde se ve que la bóveda satisfará en todas sus juntas a esta condición, si el mínimo de $M''\cot(\alpha'' - f)$ es mayor que el máximo de $M'\cot(\alpha' + f)$. Sentado esto, transformemos la condición general (A) en las tres formas:

$$\begin{gathered} b'\operatorname{tang}(\alpha'+f)\{M''\cot(\alpha''-f) - M'\cot(\alpha'+f)\} + \\ + c'\operatorname{tang}(\alpha_{\prime}+f)\{M''\cot(\alpha''-f) - M_{\prime}\cot(\alpha_{\prime}+f)\} \geq 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a'\operatorname{tang}(\alpha''-f)\{M''\cot(\alpha''-f) - M'\cot(\alpha'+f)\} + \\ + c'\operatorname{tang}(\alpha_{\prime}+f)\{M'\cot(\alpha'+f) - M_{\prime}\cot(\alpha_{\prime}+f)\} \geq 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a'\operatorname{tang}(\alpha''-f)\{M''\cot(\alpha''-f) - M_{\prime}\cot(\alpha_{\prime}+f)\} + \\ + b'\operatorname{tang}(\alpha'+f)\{M_{\prime}\cot(\alpha_{\prime}+f) - M'\cot(\alpha'+f)\} \geq 0, \end{gathered}$$

sacando sucesivamente de la ecuación (6) una de las cantidades a', b' y c' en funciones de las otras dos, y sustituyéndola después en la referida condición. Si hacemos ver que todas las expresiones incluidas dentro de los corchetes, son funciones semejantes al primer miembro de la condición (B), concluiremos que verificada ésta en los términos que dejamos dicho, debe indispensablemente de ser cierta la general (A), cualesquiera que sean los valores de M'', M' y $M_{\prime}$, siempre que nos refiramos a una bóveda simétrica. Inferiremos esto fácilmente por medio de la transformación primera, cuando los tres trozos M'', M' y $M_{\prime}$ son positivos, esto es, cuando su posición con respecto a la clave es la misma que tienen en la figura 1: por la transformación segunda, en el caso de ser los dos primeros positivos y el tercero negativo, o bien éste positivo y los otros dos negativos: por la transformación última, siempre que el primero sea positivo, el segundo negativo y el tercero positivo; y éstas son todas las diferentes variedades que pueden ocurrir con relación a los signos o situación de los trozos M'', M' y $M_{\prime}$. Además, al hacer en la condición general $M' = M_{\prime}$ en un caso, y $M' = -M''$ en otro, suponemos que la bóveda se abre por tres trozos situados [28/29] simétricamente con respecto a la clave, según representamos en las Figs. 10 y 11, de las cuales la primera se refiere al caso en que el trozo del medio hace subir a los dos laterales

resbalando por los planos inclinados de sus juntas de lecho, y la segunda cuando éstos se mueven en dirección contraria empujando al del medio para que resbale de abajo a arriba. La razón es clara, porque en la Fig. 10 siendo $M' = M_{\prime}$, el trozo $M'N_{\prime}$ queda dividido en dos partes iguales por la clave, y es evidente que si este trozo puede empujar al inferior $M'N''$, también podrá hacer otro tanto contra el trozo $M_{\prime}N_{\prime\prime}$ siempre que éste sea igual en magnitud y posición al trozo $M'N''$: del mismo modo se prueba que el movimiento representado por la Fig. 11, se considera haciendo en la condición (A) $M' = -M''$, lo cual equivale a suponer el trozo $M''N'$ de la Fig. 1 dividido en dos mitades por la clave. Resulta, pues, de todo lo dicho en este número, que si una bóveda simétrica no puede venirse abajo con el movimiento puro de traslación abriéndose por cuatro juntas, dos de ellas situadas al lado derecho de la clave y de la misma forma que las otras dos al izquierdo, tampoco lo podrá adquirir abriéndose por otro número cualquiera de juntas y situadas de diferente manera: luego para evitar todos los movimientos de traslación en una bóveda simétrica, basta sólo tener presente la condición (B). Si ésta no se verifica siendo M'' mayor que M', el arco tomará el movimiento expresado en la Fig. 10, y el representado por la Fig. 11 siendo M'' menor que M'.

20. Tratemos ya de aplicar la condición (B) a una bóveda de medio punto, y cuyas dovelas sean todas de la misma longitud, y supongamos que se quiere averiguar el menor valor que puede tener la fricción, a fin de que esta bóveda se mantenga sin adquirir el movimiento puro de traslación. Para esto hallaremos el mínimo de $(rK + 1/2\ K^2)\alpha'' \cot(\alpha'' - f)$, y el máximo de $(rK + 1/2\ K^2)\alpha' \cot(\alpha' + f)$, que son las expresiones equivalentes a $M''\cot(\alpha'' - f)$ y $M'\cot(\alpha' + f)$, llamando r el radio del círculo interior. En cuanto al mínimo de $(rK + 1/2\ K^2)\alpha'' \cot(\alpha'' - f)$ [29/30] será excusado hallarlo teóricamente, porque la expresión $\alpha'' \cot(\alpha'' - f)$ disminuye sin interrupción desde $\alpha'' = 0$ hasta $\alpha'' = 90^{\circ}$ que son sus dos límites (véanse los dos núm. 4 y 13) por consiguiente se tendrá en este caso mínimo de $M''\cot(\alpha'' - f) = \frac{\pi}{2}(rK + 1/2\ K^2) \operatorname{tang} f$, si por $\frac{\pi}{2}$ expresamos la relación de un cuadrante de círculo con su radio. El máximo de $M'\cot(\alpha' + f)$ da la ecuación $d[\alpha' \cot(\alpha' + f)] = 0$, o bien $\alpha' = \cos(\alpha' + f) \operatorname{sen}(\alpha' + f)$, y el objeto de la cuestión esta otra $\frac{\pi}{2} \operatorname{tang} f - \alpha' \cot(\alpha' + f) = 0$: de la combinación de estas dos sacamos $\cos(\alpha' + f) = \sqrt{(\frac{\pi}{2} - \operatorname{tang} f)}$, $\sqrt{(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} f)\ \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} f} = \alpha'$, o $\sqrt{(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} f)\ \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} f} + f = \alpha' + f$, y pasando de los ángulos a la expresión de sus cosenos, tendremos la final

$$\cos(\alpha' + f) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{tang}\, f} = \cos\left(f + \sqrt{\left(1 - \tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{tang}\, f\right) \tfrac{\pi}{2}\,\mathrm{tang}\, f}\right)$$

de donde, si se emplea el método de tanteos para determinar tang f, hallaremos ser con corta diferencia tang $f = 0{,}31$, aproximada por exceso. Así, pues, siempre que el rozamiento sea mayor que 0,31 de la presión, como en efecto lo es en la mayor parte de casos, no habrá que tener el menor recelo de que las bóvedas de medio punto y dovelas iguales se vengan abajo, adquiriendo el movimiento puro de traslación.

21. De lo expuesto en el núm. 16 se infiere que el movimiento de traslación sería imposible de evitar si no fuera por la fricción; y esto nos muestra que debemos caminar con mucho cuidado cuando por ciertas circunstancias particulares se sepa o presuma que el rozamiento no ha de producir su efecto, como sucede en un corto intervalo de tiempo que empieza a contarse desde el instante que los arcos recién acabados de construir se ven enteramente libres de la cimbra, sin haber dado lugar a que la mezcla interpuesta entre las juntas de las dovelas tome la debida consistencia. Si la causa principal del rozamiento dimana de la resistencia que oponen al romperse las escabrosidades de los cuerpos sobre cuyas superficies se efectúa el movimiento, no admite duda que en el caso propuesto de hallarse [30/31] el arco sin cimbra y el mortero en un estado de blandura capaz de ceder a presiones muy cortas, las dovelas deben obedecer libremente, sin hacerse sentir el rozamiento, a las dos fuerzas perpendicular y paralela a las respectivas juntas inferiores de lecho, en que puede descomponerse la resultante de todas las fuerzas que solicitan a cada dovela en particular: la primera de estas componentes se empleará solamente a los principios en aproximar los lechos unos con otros, haciendo desalojar el mortero que los separa, resultando de aquí una contracción en la longitud del arco, tanto más sensible cuanto mayor fuere el número de lechos de que consta; y la segunda componente conseguirá hacer resbalar a las dovelas en dirección de sus juntas hacia el centro del arco o en sentido contrario, según el signo que acompañe a esta fuerza. Pero llegado el caso de que las juntas estén ya tocándose unas con otras todo lo posible, desde este mismo instante comienza la primera fuerza a ejercer solamente el oficio de presión, y por tanto el rozamiento a producir su efecto sofocando el movimiento originado por la segunda fuerza. De resultar del movimiento de las dovelas a lo largo de sus juntas puede aparecer desfigurada algún tanto la curvatura del intradós, o tal vez originarse la ruina total del arco, si no se toman las debidas precauciones para impedir

que las dovelas adquieran una velocidad sensible que ya no pueda ser enteramente destruida por el rozamiento desde luego que este empieza a tener lugar. El método directo de evitar enteramente los efectos de este movimiento, sería hacer que la bóveda satisficiere en todos sus puntos a la ecuación (10), pero con semejante proceder, además de los inconvenientes advertidos en el núm. 17, resultaría otro de no menor consideración, pues tendríamos que dar a las bóvedas una figura determinada y para siempre, por sólo remediar [31/32] un mal de corta duración: así es que para tales casos no nos queda otro arbitrio que quitar las cimbras de la forma prescrita por M. Perronet en la memoria que dio con el mismo objeto en 1773 a la Academia de Ciencias de Paris, la cual se halla también en el suplemento a sus obras.

22. Uno de los puestos en que se vio obligado este autor a quitar las cimbras antes de secarse el mortero, y el que dio a conocer con mayor claridad los dos diferentes movimientos de las dovelas, fue el puente de St. Edme de Nogent, cuya montea era de 26 pies, la luz de 90 y la clave de 5. Quitada la cimbra en este puente, las líneas *de* y *da*, que antes de esta operación se habían tirado rectas, según se ve en la Fig. 8, aparecieron después transformadas en curvas como lo representa la Fig. 9, la segunda línea con un punto f de inflexión situado en la dovela décima séptima, y la montea disminuida cerca de pie y medio a causa de la contracción padecida por el arco. Esta observación nos prueba claramente que las dovelas superiores al punto f se vieron obligadas a bajar resbalando por sus respectivas juntas de lecho, y las inferiores a subir con igual movimiento, apareciendo únicamente inmóvil la dovela que coincide con el punto f: por consiguiente si queremos averiguar analíticamente la posición del punto f, esto es de la dovela que se mantuvo en equilibrio durante el movimiento de las demás, no habrá más que igualar a cero el primer miembro de la condición (B), haciendo tang $f = 0$, $M'' = M' + dM'$ y $\alpha'' = \alpha' + d\alpha'$, con lo cual la ecuación

$$d(M' \cot \alpha') = 0 \tag{11}$$

que resulta con estas sustituciones, nos dará a conocer dicha posición. Para aplicar esta ecuación al puente mencionado, hemos de advertir que el valor de $M' \cot \alpha'$, expresado en funciones de la abscisa x' correspondiente a un punto M cualquiera del intradós, presenta algunas dificultades a causa de no ser ésta una curva for-

mada por ninguna ley de continuidad, sino por diferentes arcos de [32/33] círculo: y así no tenemos medio más sencillo que igualarla a la función $A + Bx' + Cx'x'$, haciendo que los coeficientes A, B y C satisfagan a tres puntos principales cuales son, el empuje del arco, el punto en el que la normal del intradós forma el ángulo de 45º con la vertical y el horizonte, y el nacimiento o arranque del arco. Llamando, pues, m la montea del arco, l su semiluz, y K la altura de la clave según costumbre; $M'\cot \alpha'$ será en el empiece del arco = $K\, l^2 / m + 1/2\, K^2 = 402$, si suponemos que en dicho punto se confunde la curvatura del intradós con una elipse cuyos semiejes mayor y menor son l y m: referida la misma cantidad $M'\cot \alpha'$ al ángulo $\alpha' = 45º$ y suponiendo en este caso que $y' = l^2 / \sqrt{l^2 + m^2} = 39$ pies, $x' = m - m^2 / \sqrt{l^2 + m^2} = 13$, como si el intradós fuera realmente una elipse, sale $M'\cot \alpha' = M' = 1/2\,(K + x)^2 + y'\,(K + 1/2\, x') = 493$, considerada parabólica la superficie AMP comprendida entre la ordenada y la curva intradós: finalmente, haciendo $\alpha' = 90º$, ó $m = x'$, resulta $M'\cot \alpha' = 0$. Sustituidos estos tres valores en la expresión que hemos hecho equivalente a $M'\cot \alpha'$, tendremos $A = 402$, $B = 29{,}5$ y $C = -1{,}73$, y la ecuación (11) nos dará por último

$$x' = -\frac{B}{2C} = 8{,}5 \text{ pies.}$$

Si trazamos gráficamente el arco interior con once centros, de la manera que manifiesta en sus obras M. Perronet, y tomamos por abscisa la cantidad $AP = 8{,}5$ pies, veremos que corresponde a un punto de la curva que cae justamente entre el espacio que ocupan las dos juntas de lecho de la dovela décima séptima. M. Perronet, a fin de confirmar teóricamente sus observaciones, se vale para el puente de St. Edme de Nogent de un resultado deducido por M. Couplet en el problema que re-suelve (véanse las memorias de ciencias de Paris año de 1729) con el objeto de ha-llar el peso que sostiene una cimbra antes de poner la clave, y para el Puente de Neulli emplea la hipótesis que admite M. Lahire (véanse las mismas, año 1712) con la mira de determinar la junta de rotura que se manifiesta en un arco que se viene abajo de resultar de no tener los estribos la suficiente solidez; pero tanto la hipótesis de este último autor, como el resultado de M. Couplet se refieren a dos cuestiones bien diferentes de la que acaba de ocuparnos.

Capítulo segundo

De las condiciones que impiden los movimientos puros de rotación

23. Sean $N''M'$, $M'N_{\prime}$ y $N_{\prime}M_{\prime\prime}$ los tres trozos que entran a producir el movimiento puro de rotación (Fig. 2), y descompongamos el peso $M'+M_{\prime}$ del trozo $M'N_{\prime}$, desde un punto φ indeterminado de la vertical que pasa por su centro de inercia, en dos fuerzas F' y $F_{\prime}$ que formen con la misma línea los ángulos λ' y $\lambda_{\prime}$. Para concebir en esta descomposición el movimiento de los tres trozos alrededor de los puntos N'', M', $N_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$ se necesita: 1º que la componente F' pase por abajo del punto M', a fin de que la junta $M'N'$ se abra por el extradós: 2º que $F_{\prime}$ pase por encima de $N_{\prime}$ para que la junta $M_{\prime}N_{\prime}$ se abra por el intradós: 3º que el momento de $F_{\prime}$ con respecto al punto $M_{\prime\prime}$ sea menor que el del trozo $M_{\prime\prime}N_{\prime}$ con relación al mismo punto $M_{\prime\prime}$: 4º y último que el momento de F' sea mayor que el del trozo $M'N''$, referidos ambos momentos al mismo punto N''. Como las condiciones que acabamos de establecer son cuatro, y tres las variables o indeterminadas que contienen, a saber, la situación del punto φ y los ángulos λ' y $\lambda_{\prime}$; daremos a estas cantidades, de todos los valores que satisfacen a las tres primeras condiciones, aquellos que sean más propios para que se verifique mejor la cuarta. Suponiendo el punto φ inmóvil, y constante el ángulo $\lambda_{\prime}$, el momento de F' tomado en el punto N'' crece a medida que λ' aumenta: luego la fuerza F' debe pasar por M', una vez que el ángulo $f\varphi M'$ es el mayor valor que puede tener λ' a causa de la condición primera. Si supuesta en efecto la fuerza F' aplicada en M', considera-

mos que el punto φ baja verticalmente de resultar de moverse paralelamente a sí misma la otra fuerza F_ι; se [34/35] advertirá también que el momento de F', referido al mismo punto N'', va sucesivamente aumentando de valor; pero como el punto φ no puede bajar más de lo que le permite la fuerza F_ι que en virtud de la segunda condición ha de pasar por encima del punto N_ι, se infiere de aquí que esta segunda fuerza debe igualmente suponerse aplicada a su respectivo punto N_ι. Finalmente, observando que los momentos de las componentes F' y F_ι, aplicadas ya a los puntos M' y N_ι, y tomados aquéllos respectivamente en los puntos N'' y M_u, aumentan al paso que es más abierto el ángulo $M'\varphi N_\iota$ formado por dichas fuerzas, y que la condición tercera obliga a que el segundo momento sea menor que el del trozo $M_u N_\iota$; concluiremos por fin diciendo que las componentes del trozo $M'N_\iota$ deben, no sólo dirigirse respectivamente a los puntos M' y N_ι, sino también tirarse desde un punto φ tal, que los momentos de F_ι y del trozo $M_u N_\iota$, referidos al punto M_u, resulten iguales.

24. Sentado esto, convengamos en expresar por $Mom''F'$, $Mom_\iota F'$, $Mom_u F'$, los momentos de F' tomados respectivamente en los puntos N'', N_ι, y M_u, del mismo modo que por $Mom_u F_\iota$, $Mom'_\iota F_\iota$ y $Mom''\,F_\iota$ los de la fuerza F_ι referidos a los puntos M_u, M' y N'': también expresemos, siguiendo la misma analogía, por $Mom''\,(M''-M')$, $Mom'(M'+M_\iota)$, $Mom_u(M_u-M_\iota)$, $Mom_\iota(M_\iota+M')$ los de los trozos $N''M' = M''-M'$, $M'N_\iota = M'+M_\iota$, $M_u N_\iota = M_u - M_\iota$, $N_\iota M' = M_\iota + M'$, con respecto a un punto de apoyo N'', M', M_u, N_ι; y se tendrá

$$Mom''F' = F'\{(z''-x')\text{ sen }\lambda' - (u''-y')\cos\lambda'\},$$

$$Mom_u F' = F'\{(x_u - x')\text{ sen }\lambda' + (y_u + y')\cos\lambda'\},$$

$$Mom_\iota F' = F'\{(z_\iota - x')\text{ sen }\lambda' + (u_\iota + y')\cos\lambda'\}.$$

Por ser F' y F_ι componentes de $M' + M_\iota$ dirigidas a los puntos M' y N_ι, sale $Mom_\iota F' = Mom_\iota(M_\iota + M')$, y esta cantidad sustituida en la ecuación última da

$$F' = \frac{Mom_\iota(M_\iota + M')}{(z_\iota - x')\text{ sen }\lambda' + (u_\iota + y')\cos\lambda'}$$

con lo cual las dos primeras se transforman en: [35/36]

$$Mom''F' = \frac{(z'' - x')\ \mathrm{tang}\ \lambda' - (u'' - y')}{(z_{\iota} - x')\ \mathrm{tang}\ \lambda' + (u_{\iota} + y')}\ Mom_{\iota}(M' + M_{\iota}),$$

pero por lo dicho al fin del núm. 23, y ser $M' + M_{\iota}$ resultante de F' y F_{ι} se tiene $Mom_{\iota\iota}F_{\iota} = Mom_{\iota\iota}\ (M_{\iota\iota} - M_{\iota}) = Mom_{\iota\iota}F' - Mom_{\iota\iota}\ (M_{\iota} + M')$, esto es, $Mom_{\iota\iota}F' = Mom_{\iota\iota}\ (M_{\iota\iota} + M')$: igualando esta última expresión de $Mom_{\iota\iota}F'$ con la anterior, y despejando tang λ', sacaremos

$$\mathrm{tang}\ \lambda' = \frac{(u_{\iota} + y')Mom_{\iota\iota}(M_{\iota\iota} + M') - (y_{\iota\iota} + y')Mom_{\iota}(M_{\iota} + M')}{(x_{\iota\iota} - x')Mom_{\iota}(M_{\iota} + M') - (z_{\iota} - x')Mom_{\iota\iota}(M_{\iota\iota} + M')} \qquad (1)$$

y de consiguiente:

$$Mom''F' = \frac{\{(z'' - x')(u_{\iota} + y') + (z_{\iota} - x')(u'' - y')\}Mom_{\iota\iota}(M_{\iota\iota} + M')}{(x_{\iota\iota} - x')(u_{\iota} + y') + (x' - z_{\iota})(y_{\iota\iota} + y')} -$$
$$- \frac{\{(z'' - x')(y_{\iota\iota} + y') + (x_{\iota\iota} - x')(u'' - y')\}Mom_{\iota}(M_{\iota} + M')}{(x_{\iota\iota} - x')(u_{\iota} + y') + (x' - z_{\iota})(y_{\iota\iota} + y')}$$

Así, pues, el movimiento en cuestión de los tres trozos no podrá verificarse, mientras sea

$$Mom''(M'' - M') - \left[\frac{\{(z'' - x')(u_{\iota} + y') + (z_{\iota} - x')(u'' - y')\}Mom_{\iota\iota}(M_{\iota\iota} + M')}{(x_{\iota\iota} - x')(u_{\iota} + y') + (x' - z_{\iota})(y_{\iota\iota} + y')} - \right.$$
$$\left. - \frac{\{(z'' - x')(y_{\iota\iota} + y') + (x_{\iota\iota} - x')(u'' - y')\}Mom_{\iota}(M_{\iota} + M')}{(x_{\iota\iota} - x')(u_{\iota} + y') + (x' - z_{\iota})(y_{\iota\iota} + y')}\right] \geq 0 \qquad (2)$$

condición que multiplicada por $(x_{\iota\iota} - x')(u_{\iota} + y') + (x' - z_{\iota})(y_{\iota\iota} + y')$, y teniendo presente que

$$Mom''(M''-M') = M''Z'' - M'X' - M'(u''-y'),$$

$$Mom_u(M_u+M') = M_uX_u - M'X' + M'(y_u+y'),$$

$$Mom_\iota(M_\iota+M') = M_\iota Z_\iota - M'X' + M'(u_\iota+y'),$$

queda convertida en:

$$a''M''Z'' - b''M'X' + c''M_\iota Z_\iota - d''M_uX_u \geq 0, \qquad \text{(C)}$$

bajo el concepto de ser

$$a'' = (x_u - x')(u_\iota + y') + (x' - z_\iota)(y_u + y'),$$

$$b'' = (z'' - z_\iota)(y_u - u_\iota) + (x_u - z_\iota)(u'' + u_\iota) = a'' + c'' - d'',$$

$$c'' = (z'' - x')(y_u + y') + (x_u - x')(u'' - y'),$$

$$d'' = (z'' - x')(u_\iota + y') + (z_\iota - x')(u'' - y').$$

25. Por las mismas operaciones hechas para reducir el coeficiente de $M'X'$ a la cantidad llamada b'', se viene en conocimiento de ser $a'' - b'' + c'' - d'' = 0$; y es fácil conocer también que $a''z'' - b''x' + c''z_\iota - d''x_u = 0$, porque poniendo por b'' su igual $a'' + c'' - d''$, la cantidad $a''z'' - b''x' + c''z_\iota - d''x_u$ se convierte en $a''(z'' - x') + c''(z_\iota - x') - d''(x_u - x')$ que aparece [36/37] igual con cero, sustituyendo por a'', c'' y d'' sus valores en funciones de las coordenadas. En esta inteligencia, si de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a'' - b'' + c'' - d'' &= 0, \\ a''z'' - b''x' + c''z_\iota - d''x_u &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

despejamos a'' y b'', y se sustituyen en la condición general (C) quedará transformada después de dividir todos sus términos por $c''d''$, en

$$\frac{(x'-z_\iota)}{d''}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-\frac{M'X'-M_\iota Z_\iota}{x'-z_\iota}\right\}+\frac{x_u-x'}{c''}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-\frac{M_uX_u-M'X'}{x_u-x'}\right\}\geq 0 \quad (4)$$

que puede servir para examinar si la bóveda es o no capaz de adquirir el movimiento puro de rotación, empleando un método parecido al que dimos en el nº 13 para el movimiento de traslación. La condición (C) es aun todavía mucho más complicada que la general (A); tratando de averiguar directamente el mínimo de su primer término con respecto a las variables M'', M', $M_{\prime}$, $M_{\prime\prime}$; y aunque puesta en la forma que acabamos de darla, aparecen las cantidades $M_{\prime\prime}$ y $M_{\prime}$ igualmente que sus dependientes, separadas unas de otras, y sólo mezcladas con M'' y M', es sin embargo la transformación más acomodada que puede conseguirse a fin de hallar la situación de los trozos que producen el mayor empuje, al menos cuando la bóveda no es simétrica. Haciendo, pues, bajo este supuesto M'' = al trozo contado desde la clave hasta uno de los arranques, los dos términos de la condición (4) quedan siendo funciones, el primero de M' y $M_{\prime}$ y el segundo de M' y $M_{\prime\prime}$: luego si después damos al trozo M' un valor determinado, el primer término aparecerá función solamente de $M_{\prime}$ y el segundo de $M_{\prime\prime}$; y podremos con facilidad hallar el mínimo de cada uno de ellos, según las diferentes sustituciones que se vayan haciendo en M'. Si la suma de estos mínimos resulta siempre positiva, bajo todos los diferentes valores de M', ya se cuenten los trozos M', M'', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$ de derecha a izquierda como se representa en la Fig. 2, o ya de izquierda a derecha, en este caso estamos seguros que la bóveda no podrá de ninguna manera adquirir el movimiento puro de rotación.

26. Para tener la condición primitiva (2) bajo la forma (4), la hemos multiplicado por a'', y dividido por $c''d''$; y según lo advertido en el nº 12, es necesario a fin de poder efectuar estas operaciones, [37/38] que las cantidades a'', b'', c'' y d'' sean positivas: por lo tanto nos resta ahora probar que dichas cantidades deben solamente considerarse bajo esta acepción, desechando los casos en que cualquiera de ellas resulte negativa. En efecto será excusado, para ver si los trozos $N''M'$, $M'N_{\prime}$ y $N_{\prime}M_{\prime\prime}$ pueden adquirir (Fig. 2) el movimiento puro de rotación, tomar los puntos N'', M' y $N_{\prime}$ tales que el ángulo $N''M'N_{\prime}$ sea mayor que dos rectos, porque en este caso la fuerza F' que se dirige a hacer volcar el trozo $N''M'$ por el punto N'', pasando su dirección entre el punto N'' y el centro del arco, se hallara incapaz de producir tal efecto: suponiendo pues, según lo acabado de decir, que sólo se toman aquellos puntos N'', M' y $N_{\prime}$ en que es $N''M'N_{\prime} < 180^{o}$, y teniendo presente que debe ser $M'N_{\prime}M_{\prime\prime} < 180^{o}$ por lo manifestado en la condición tercera

del núm. 4, será fácil inferir de aquí que las condiciones $N''N_{\iota}M_{u} < 180^{\circ}$, y $N''M'M_{u} < 180^{\circ}$ son igualmente ciertas; y si de los ángulos $M_{u}N_{\iota}M'$, $M_{u}N_{\iota}N''$, $M_{u}M'N''$ y $N_{\iota}M'N''$ pasamos a la expresión de sus senos en funciones de las coordenadas de los puntos M_{u}, N_{ι}, M' y N'', resultarán por último positivas las cantidades a'', b'', c'' y d''. Esta es la razón por que consideramos la condición (2), lo mismo que sus derivadas, sólo en el concepto de ser a'', b'', c'' y d'' positivas, esto es refiriéndonos únicamente a los casos en que es incierta o dudosa la existencia de aquella condición, y así es como caminando bajo este supuesto, la podemos multiplicar o dividir por cualquiera de las cantidades a'', b'', c'' y d'', sin alterar la relación que existe entre sus dos miembros.

27. Por lo expuesto en el núm. próximo pasado, se deduce que siendo la expresión $d'' = (z'' - x')(u_{\iota} + y') - (x' - z_{\iota})(u'' - y')$ negativa bajo todas las posiciones de los puntos N_{ι}, M' y N'' sin pasar de los arranques, puede la bóveda sostener un peso cualquiera encima del extradós sin venirse abajo. La cantidad d'' no podrá menos de ser negativa, siempre que las tangentes $c_{\iota}m't'$ y $c'm_{\iota}t_{\iota}$ (Fig. 20) tiradas en la curva interior desde los puntos c_{ι} y c' del extradós que están a plomo con los arranques C_{ι} y C', no corten en ningún otro punto a la curva exterior porque la expresión d'' sólo tiene el signo positivo cuando la prolongación de la línea tirada por los puntos N_{ι} [38/39] y M' (Fig. 2) pasa por arriba del punto N''; pero esta línea, suponiendo variables los puntos N_{ι} y M', se desvía tanto más hacia arriba del punto N'' cuanto más se acerca a ser tangente del intradós, y cuanto el punto N_{ι} se aproxima más al punto M_{u}: y es de advertir que ni el punto M_{u} puede hallarse más abajo del nacimiento del intradós, ni el punto N_{ι} de la común intersección de la curva exterior con la vertical que pasa por M_{u}, pues el trozo $M_{u}N_{\iota}$ se hallaría de lo contrario imposibilitado de producir efecto contra los trozos $N_{\iota}M'$ y $M'N''$. Tampoco podrán los machones (Fig. 20) girar por los puntos F' y F_{ι} de sus bases, si las mismas tangentes $c_{\iota}m't'$ y $c'm_{\iota}t_{\iota}$ pasan por entre dichos puntos: por lo que siendo la bóveda de medio punto, se necesita que el grueso de las dovelas sea lo menos igual al radio del círculo interior, y el de los machones igual al mismo radio más la altura que éstos tengan multiplicada por $\sqrt{3} = 1{,}73$, etc., a fin de que tanto las dovelas como los machones se hallen enteramente libres de tomar el movimiento de rotación, cualesquiera que sean la posición y magnitud del peso que cargue sobre la bóveda.

28. En caso de referirse la condición (C) a bóvedas de un espesor infinitamente pequeño, será permitido confundir las coordenadas del intradós con las del extradós , poniendo en vez de las letras Z, z, u, estas otras X, x, y, con los mismos acentos que tengan aquellas; y de consiguiente tendremos

$$a''M''X'' - b''M'X' + c''M_{\iota}X_{\iota} - d''M_{u}X_{u} \geq 0,$$

siendo para este caso

$$\begin{aligned}
a'' &= (x_{u} - x')(y_{\iota} + y') + (x' - x_{\iota})(y_{u} + y'),\\
b'' &= (x'' - x_{\iota})(y_{u} + y_{\iota}) + (x_{u} - x_{\iota})(y'' + y_{\iota}),\\
c'' &= (x'' - x')(y_{u} + y') + (x_{u} - x')(y'' - y'),\\
d'' &= (x'' - x')(y_{\iota} + y') - (x' - x_{\iota})(y'' - y').
\end{aligned}$$

Como esta condición debe igualmente referirse al lado izquierdo de la clave, y con las mismas circunstancias que se concibieron en el derecho, es necesario que se verifique también poniendo M_{u}, M_{ι}, M' y M'', en lugar de M'', M', M_{ι} y M_{u}, esto es, que se tenga al mismo tiempo esta otra condición

$$(a'')M_{u}X_{u} - (b'')M_{\iota}X_{\iota} + (c'')M'X' - (d'')M''X'' \geq 0, \qquad [39/40]$$

llamando (a''), (b''), etc. lo que se vuelven las cantidades a'', b'', etc., invirtiendo los acentos a las variables x'', x', y'', y' etc. Hecha esta operación advertiremos ser $(a'') = d''$, $(b'') = c''$, $(c'') = b''$, $(d'') = a''$, con lo cual resultan iguales los primeros miembros de las dos condiciones últimas, y de signos encontrados; y esto nos manifiesta que semejantes bóvedas no podrán mantenerse a menos que no se las de un estado de perfecto equilibrio. Satisfarán a este estado siempre que independientemente de la posición de los trozos M'', M', M_{ι} y M_{u} se verifique la ecuación

$$a''M''X'' - b''M'X' + c''M_{\iota}X_{\iota} - d''M_{u}X_{u} = 0,$$

la cual, haciendo las mismas operaciones que las ejecutadas en la condición general para darla la forma (4), se convierte en

$$\frac{c''}{x''-x'}\{M''X''(x'-x_{\iota})-M'X'(x''-x_{\iota})+M_{\iota}X_{\iota}(x''-x')\}+$$

$$+\frac{d''}{x''-x'}\{M''X''(x_{u}-x')-M'X'(x_{u}-x'')-M_{u}X_{u}(x''-x')\}\geq 0,$$

y poniendo $x''/x'\ (x'-x_{\iota})+x_{\iota}/x'\ (x''-x')$ en lugar del coeficiente $(x''-x_{\iota})$ que tiene $M'X'$ en el primer corchete, y $x''/x'\ (x_{u}-x')-x_{u}/x'\ (x''-x')$ en lugar del coeficiente $(x_{u}-x'')$ que tiene la misma cantidad en el segundo corchete, será,

$$\frac{c''x''(x'-x_{\iota})}{x''-x'}\left\{\frac{M''X''}{x''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+c''x_{\iota}\left\{\frac{M_{\iota}X_{\iota}}{x_{\iota}}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+$$

$$+\frac{d''x''(x_{u}-x')}{x''-x'}\left\{\frac{M''X''}{x''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+d''x_{u}\left\{\frac{M'X'}{x'}-\frac{M_{u}X_{u}}{x_{u}}\right\}=0:$$

con cuya transformación se hecha de ver fácilmente que necesita ser en todos los puntos de la curva

$$\frac{MX}{x}=\text{constante.}$$

Si la bóveda es de cañón seguido, se tiene $MX=\int dy\int(dx^{2}+dy^{2})^{1/2}$, y si de media naranja sale $MX=\int dy\int y\,(dx^{2}+dy^{2})^{1/2}$: sustituidos estos valores de MX en la ecuación última y diferenciándola dos veces en el supuesto de ser dy constante después de multiplicar por x sus miembros, tendremos dos ecuaciones iguales a las que dimos a conocer en el nº 18: lo que nos prueba que las catenarias plana y de revolución son las únicas curvas que deben formar las [40/41] bóvedas de cañón seguido y media naranja para que no se vengan abajo en el caso de ser su espesor infinitamente pequeño. Esta propiedad es la que hace verdaderamente recomendables a la práctica las dos curvas acabadas de mencionar y no el supuesto admitido en el núm. 18 del Capítulo Segundo, porque nunca se verifica.

29. Consideremos ya el caso de ser simétricas las bóvedas, y hagamos en la condición (C) separadamente $M_{u} = M'$, y $M'' = M_{\iota}$: cuyos dos supuestos dan:

$$M''Z''(x' - z_{\iota}) - M'X'(z'' - z_{\iota}) + M_{\iota}Z_{\iota}(z'' - x') \geq 0 \qquad \text{(D)}$$

$$-M_{u}X_{u}(z_{\iota} - x') + M_{\iota}Z_{\iota}(x_{u} - x') - M'X'(x_{u} - z_{\iota}) \geq 0 \qquad \text{(E)}$$

debiendo hacerse en la primera $M'' > M' > M_{\iota}$, y en la segunda $M_{u} > M_{\iota} > M'$. Las condiciones (D) y (E) se refieren a impedir que las bóvedas se abran por seis juntas situadas simétricamente con respecto a la clave, ya hundiéndose la parte superior y elevándose los riñones, o ya hundiéndose éstos y elevándose aquélla: cuyas diferencias están representadas por las Figs. 12 y 13. Porque si los tres trozos $M_{u}N'$, $N_{\iota}M'$ y $M'N''$ se abren por sus respectivas juntas de lecho, haciendo en la Fig. 12 $M_{u}B = M'B$, y en la Fig. 13 $N_{\iota}B = N''B$ con arreglo a los dos supuestos que han producido las condiciones (D) y (E), es claro que por ser simétrica la bóveda deberán también manifestarse abiertos los trozos $M'n'$ y $M_{u}n_{u}$ de la figura primera y los trozos $N_{\iota}m_{\iota}$ y $N''m''$ de la segunda, siempre que cada uno de ellos sea igual al que tiene enfrente de sí en su respectiva figura.

30. ¿Pero en una bóveda simétrica, evitados los movimientos que se expresan en las Figs. 12 y 13 mediante las condiciones (D) y (E), lo estarán igualmente todos los demás que pueden deducirse de hacer en la condición general (C) otros distintos supuestos que los del número anterior? Para hacer ver que esto sucede en efecto, vamos a demostrar que la condición (C) referida a una bóveda simétrica, es evidentemente cierta bajo todos los valores posibles de M'', M', M_{ι} y [41/42] M_{u} siempre que lo sean las dos últimas (D) y (E). Con este fin hallemos primero las diferentes relaciones de desigualdad que pueden existir entre los trozos M'', M', M_{ι} y M_{u}, y expresémosla por las permutaciones que admiten estas cuatro letras dando a entender, por ejemplo, con la permutación $M''M_{u}M_{\iota}M'$ que el trozo M_{ι} es mayor que M' y menor que M'' y M_{u} , quiero decir, mayor que los que tiene después de él, y menor que los que le anteceden. Así convenidos, advertiremos que sólo puede existir: 1º, la permutación $M''M'M_{\iota}M_{u}$ cuando todos los trozos se hallan en el lado derecho de la clave: 2º las cuatro siguientes $M''M'M_{\iota}M_{u}$, $M''M'M_{u}M_{\iota}$, $M''M_{u}M'M_{\iota}$, $M_{u}M''M'M_{\iota}$ que resultan de los cuatro

modos con que se puede intercalar $M_{\iota\iota}$ en la permutación de tres casos $M''M'M_{\iota}$ suponiendo que estos tres trozos se hallan en el lado derecho y el otro en el izquierdo: 3º, las seis $M''M'M_{\iota\iota}M_{\iota}$, $M''M_{\iota\iota}M'M_{\iota}$, $M_{\iota\iota}M''M'M_{\iota}$, $M''M_{\iota\iota}M_{\iota}M'$, $M_{\iota\iota}M''M_{\iota}M'$, $M_{\iota\iota}M_{\iota}M''M'$, provenidas de combinar las cuatro letras de suerte que nunca se halle M' antes que M'', ni M_{ι} antes que $M_{\iota\iota}$, a causa de considerar los dos primeros trozos en el lado derecho de la clave y los otros dos en el lado izquierdo: 4º, las cuatro $M_{\iota\iota}M_{\iota}M'M''$, $M_{\iota\iota}M_{\iota}M''M'$, $M_{\iota\iota}M''M_{\iota}M'$, $M''M_{\iota\iota}M_{\iota}M'$, refiriéndonos al caso de estar sólo en el lado derecho el trozo M'', y los tres restantes en el izquierdo: 5º y último, la permutación $M_{\iota\iota}M_{\iota}M'M''$ cuando se supone que todos los cuatro se hallan en el lado izquierdo de la clave. Si reunimos todas estas permutaciones, desechando las que estén anteriormente consideradas, encontraremos que las ocho siguientes:

$$M''M_{\iota\iota}M_{\iota}M',\ M_{\iota\iota}M''M_{\iota}M',\ M_{\iota\iota}M_{\iota}M''M',\ M''M_{\iota\iota}M'M_{\iota},$$

$$M''M'M_{\iota\iota}M_{\iota},\ M_{\iota\iota}M''M'M_{\iota},\ M_{\iota\iota}M_{\iota}M'M'',\ M''M'M_{\iota}M_{\iota\iota},$$

expresan todas las relaciones de desigualdad que pueden existir entre los trozos M'', M', M_{ι} y $M_{\iota\iota}$.

31. Esto supuesto: de las ecuaciones (3) eliminemos dos de las cuatro letras $a''b''c''$ y d'' en funciones de las otras dos, y hecha la sustitución en la condición (C) podrá ésta transformarse bajo las cinco formas que siguen: [43/44]

$$\frac{a''}{x_{\iota\iota}-z_{\iota}}\{M''Z''(x_{\iota\iota}-z_{\iota})-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z''-z_{\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(z''-x_{\iota\iota})\}+$$

$$+\frac{b''}{x_{\iota\iota}-z_{\iota}}\{-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z_{\iota}-x')+M_{\iota}Z_{\iota}(x_{\iota\iota}-x')-M'X'(x_{\iota\iota}-z_{\iota})\}\geq 0,$$

$$\frac{a''}{x_{\iota\iota}-x'}\{-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z''-x')+M''Z''(x_{\iota\iota}-x')-M'X'(x_{\iota\iota}-z'')\}+$$

$$+\frac{c''}{x_{\iota\iota}-x'}\{-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z_{\iota}-x')+M_{\iota}Z_{\iota}(x_{\iota\iota}-x')-M'X'(x_{\iota\iota}-z_{\iota})\}\geq 0,$$

$$\frac{b''}{z''-z_{\iota}}\{M''Z''(x'-z_{\iota})-M'X'(z''-z_{\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(z''-x')\}+$$

$$+\frac{d''}{z''-z_{\iota}}\{M''Z''(x_{\iota\iota}-z_{\iota})-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z''-z_{\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(z''-x_{\iota\iota})\}\geq 0,$$

$$\frac{c''}{z''-x'}\{M''Z''(x'-z_{\iota})-M'X'(z''-z_{\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(z''-x')\}+$$

$$+\frac{d''}{z''-x'}\{-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z''-x')+M''Z''(x_{\iota\iota}-x')-M'X'(x_{\iota\iota}-z'')\}\geq 0,$$

$$\frac{a''}{z_{\iota}-x'}\{M_{\iota}Z_{\iota}(x'-z'')-M'X'(z_{\iota}-z'')+M''Z''(z_{\iota}-x')\}+$$

$$+\frac{d''}{z_{\iota}-x'}\{-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(z_{\iota}-x')+M_{\iota}Z_{\iota}(x_{\iota\iota}-x')-M'X'(x_{\iota\iota}-z_{\iota})\}\geq 0,$$

y esta última se convierte, cambiando los signos de los numeradores y denominadores, en

$$\frac{a''}{x'-z_{\iota}}\{M''Z''(x'-z_{\iota})-M'X'(z''-z_{\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(z''-x')\}+$$

$$+\frac{d''}{x'-z_{\iota}}\{-M'X'(z_{\iota}-x_{\iota\iota})+M_{\iota}Z_{\iota}(x'-x_{\iota\iota})-M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}(x'-z_{\iota})\}\geq 0.$$

Si destinamos la transformación primera para cuando la relación de desigualdad de los trozos está representada por la permutación $M''M_{\iota\iota}M_{\iota}M'$; la segunda para el caso de verificarse la permutación $M_{\iota\iota}M''M_{\iota}M'$, o la que le sigue $M_{\iota\iota}M_{\iota}M''M'$; la tercera siempre que tenga lugar alguna de las permutaciones $M''M_{\iota\iota}M'M_{\iota}$ y $M''M'M_{\iota\iota}M_{\iota}$; la cuarta transformación en caso de considerar la permutación $M_{\iota\iota}M''M'M_{\iota}$; y respectivamente las dos últimas transformaciones verificándose la séptima permutación y la octava: si observamos que en las bóvedas simétricas no deben los acentos alterar la naturaleza de las funciones como sean

unas mismas las letras, y en fin si fijamos la atención en los diferentes oficios que ejercen los trozos M'', M', $M_{\prime}$, $M_{\prime\prime}$ en las permutaciones a que nos referimos; echaremos de ver que no sólo las expresiones incluidas dentro de los corchetes son funciones iguales a los primeros miembros de las condiciones (D) y (E), sino que además están sus variables sujetas a los mismos límites que dimos en el núm. 29 a las letras M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$: de consiguiente, siendo ciertas las dos condiciones (D) y (E), lo será igualmente la general (C) con todos los valores posibles de las variables que contiene, en el caso de referirnos a bóvedas simétricas. De aquí resulta un principio análogo al que hicimos ver en el no. 19 con respecto al movimiento puro de traslación, a saber: que si una bóveda simétrica no puede venirse abajo con el movimiento puro de rotación, abriéndose por seis juntas de lecho, tres de ellas situadas a un lado de la clave y con la misma posición que las otras tres al opuesto [43/44], tampoco lo podrá hacer con otro número cualquiera de juntas y situadas de diferente manera en ambos lados. Luego en el caso propuesto bastamos sólo discutir las condiciones (D) y (E), para asegurarnos si la bóveda adquirirá o no el movimiento puro de rotación.

32. Hagamos $M_{\prime} = 0$: en la condición (D), y $M' = 0$ en la (E); y tendremos

$$\frac{M''Z''}{z'' + K} - \frac{M'X'}{x' + K} \geq 0 \qquad \text{(F)}$$

$$\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - \frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}} \geq 0 \qquad \text{(G)}$$

después de dividir la primera por $(z'' + K)(x' + K)$, y la segunda por $z_{\prime}x_{\prime\prime}$. Aquí se ve que para que estas condiciones queden satisfechas bajo todas las juntas de lecho, es necesario que los mínimos de los primeros términos sean mayores que los máximos de los segundos. Por estas expresiones no queremos precisamente dar a entender los verdaderos mínimos y máximos de $M''Z''/(z'' + K)$, $M_{\prime}Z_{\prime}/z_{\prime}$ y $M'X'/(x' + K)$, $M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}/x_{\prime\prime}$, esto es, aquellas cantidades que resultan de sustituir por M'', $M_{\prime}$, M', $M_{\prime\prime}$, los valores sacados de igualar a cero las diferenciales de $M''Z''/(z'' + K)$, $M_{\prime}Z_{\prime}/z_{\prime}$, etc., sino únicamente en el caso de salir con esta operación $M'' > M'$ y $M_{\prime\prime} > M_{\prime}$, conforme lo exige la naturaleza de la cuestión, y

dejamos notado en el núm. 29. Siempre que esta circunstancia no se verifique, será necesario, considerando sólo las expresiones que da la diferenciación para el máximo de $M'X'/(K+x')$ y el mínimo de $M_{\iota}Z_{\iota}/z_{\iota}$, referir los trozos M'' y M_{u} hasta el arranque; y si así las cantidades

$$\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'} \qquad \text{y}$$

$$\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{z_{\iota}}-\frac{M_{u}X_{u}}{x_{u}}$$

salen positivas, es señal que lo serán igualmente en todos los demás casos capaces de realizarse.

33. Cuando los valores de M'' y M_{u} sacados por la diferenciación de $M''Z''/(z''+K)$ y $M_{u}X_{u}/x_{u}$, cumplen con la circunstancia dicha de ser $M''>M'$ y $M_{u}>M_{\iota}$ dando a M' y M_{ι} los que convienen al máximo de $M'X'/K+x'$ y al mínimo de $M_{\iota}Z_{\iota}/z_{\iota}$; o en su defecto, cuando los valores de $M''Z''/(K+z'')$ y $M_{u}X_{u}/x_{u}$ referidos al arranque, son el primero menor y el segundo mayor que los correspondientes a todas las demás [44/45]sustituciones posibles, en cualquiera de estos dos casos, los únicos que regularmente tienen lugar en la práctica, es inútil discutir las condiciones (D) y (E) con mayor generalidad que la que se abrazan sus derivadas (F) y (G) puestas al principio del núm. 32. En efecto, poniendo aquéllas bajo la forma

$$\left\{\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}(K+z'')(x'-z_{\iota})+\left\{\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{K+z_{\iota}}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}(K+z_{\iota})(z''-x')\geq 0,$$

$$\left\{\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{z_{\iota}}-\frac{M_{u}X_{u}}{x_{u}}\right\}(z_{\iota}+x')x_{u}+\left\{\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{z_{\iota}}-\frac{M'X'}{x'}\right\}(x_{u}-z_{\iota})x'\geq 0,$$

lo cual se consigue fácilmente sustituyendo en la primera

$$\frac{(K+z'')(x'-z_{\iota})}{K+x'}+\frac{(K+z_{\iota})(z''-x')}{K+x'}$$

por $z'' - z_{\iota}$, coeficiente de $M'X'$, y en la segunda $x_{\iota\iota}/z_{\iota}\,(z_{\iota\iota} - x') + x'/z_{\iota}\,(x_{\iota\iota} - z_{\iota})$ por $x_{\iota\iota} - x'$ coeficiente de $M_{\iota}Z_{\iota}$, notamos desde luego que los primeros términos contenidos en los corchetes son positivos, siendo ciertas las condiciones (F) y (G), e igualmente los segundos en virtud del supuesto hecho al principio de este número: porque en el concepto de ser $M''Z''/(K + z'')$ el mínimo y $M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}/x_{\iota\iota}$ el máximo de todas las funciones parecidas a ellas, se tendrá

$$\frac{M''Z''}{K+z''} < \frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{K+z_{\iota}},\quad \frac{M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}}{x_{\iota\iota}} > \frac{M'X'}{x'}$$

y de consiguiente si son ciertas las condiciones (F) y (G), con mucha más razón será

$$\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{K+z_{\iota}} - \frac{M'X'}{K+x'} > 0,$$

$$\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{z_{\iota}} - \frac{M'X'}{x'} > 0.$$

Resulta, pues, de todo lo dicho en este número y los tres anteriores, que únicamente habrá necesidad de emplear la condición (D) con toda su generalidad, cuando refiriéndose M'' al mínimo de $M''Z''/(K + z'')$, y M' al máximo de $M'X'/(K + x')$, sea $M'' < M'$ al mismo tiempo que

$$\frac{M''Z''}{K+z''} < \frac{M'X'}{K+x'};$$

y del propio modo la condición (E) en el caso de tenerse $M_{\iota\iota} < M_{\iota}$ y

$$\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{z_{\iota}} < \frac{M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}}{x_{\iota\iota}},$$

dando a los trozos $M_{\iota\iota}$ y M_{ι} los valores correspondientes al máximo de $M_{\iota\iota}X_{\iota\iota}/x_{\iota\iota}$ y al mínimo de $M_{\iota}Z_{\iota}/z_{\iota}$.

34. Apliquemos esta doctrina a la bóveda de medio punto, y veamos dando a las dovelas el octavo del radio del arco interior, si este espesor es suficiente para impedir el movimiento puro de rotación. Conoceremos desde luego que la cantidad $M''Z''/(K + z'')$, siendo igual a

$$\frac{(K+r)(rK+\frac{1}{2}K^2)\alpha'' \operatorname{sen}\alpha'' - \frac{1}{3}(1-\cos\alpha'')(3r^2K + 3rK^2 + K^3)}{(1-\cos\alpha'')(K+r)}$$

[45/46]

que se reduce a

$$2\left(rK+\frac{1}{2}K^2\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''} - \frac{1}{3}\left(\frac{3r^2K + 3rK^2 + K^3}{K+r}\right),$$

debe tener su menor valor con la sustitución $\alpha'' = 90^{\circ}$, puesto que la cantidad

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''}$$

es tanto menor cuanto mayor α'', no pasando este ángulo de 180º, así pues, será mínimo de $M''Z''/(K + z'') = 0{,}0831\ r^2$. El máximo de

$$\frac{M'X'}{K+x'} = \frac{(rK+\frac{1}{2}K^2)\alpha' \operatorname{sen}\alpha' - (1-\cos\alpha')(r^2K + rK^2 + \frac{1}{3}K^3)}{K + r - r\cos\alpha'}$$

se halla entre los tres valores 54º, 55º y 56 de α', pues haciendo sucesivamente $\alpha' = 54^{\circ} = 55^{\circ} = 56$, sale $M'X'/K + x' = 0{,}07973\ r^2 = 0{,}07974\ r^2 = 0{,}07970\ r^2$: con lo cual podemos suponer sin error sustancial la cantidad $0{,}0798\ r^2$ por el máximo de $M'X'/K + x'$; y como $M''Z''/(z'' + K) = 0{,}0831\ r^2$ es sensiblemente mayor que $M'X'/K + x' = 0{,}0798\ r^2$, se infiere de aquí que dando $1/8\ r$ de grueso a las dovelas, tienen éstas el suficiente para impedir que la bóveda de medio punto adquiera el movimiento puro de rotación.

35. Si en vez de $K = 1/8\ r$, hubiéramos hecho $K = 1/9\ r$, ya con esta cantidad saldría $M'X'/K + x'$ mayor que $M''Z''/(z'' + K)$: lo que indica que el grueso

$K = 0{,}1061\ r$ dado por M. Couplet a fin de impedir el movimiento puro de rotación, es incapaz de conseguir dicho objeto. Esta diferencia de resultados entre la teórica de M. Couplet y la nuestra, proviene de suponer aquel autor que el empuje mayor del arco es dado por la junta de lecho que forma con la vertical el ángulo de 45º, por cuya razón lo llama ángulo de rotura; pero el cálculo del número anterior nos hace ver que el máximo de $M'X'/K + x'$ no está sino a los 55º de α'.

36. Una vez que la condición (F) es cierta en la bóveda anteriormente propuesta haciendo $K = 1/8\ r$, y que deja de serlo suponiendo $K = 1/9\ r$, será excusado pasar a discutir la condición (G) referida al mismo ejemplo, pues debe necesariamente de verificarse con cualquier valor que se de a K. En efecto, supongamos por un instante que la condición (G) no tiene lugar haciendo en ella $K = 1/8\ r$: es claro [46/47] que con mucha más razón dejará de verificarse dando a K un valor menor, cual es $K = 1/9\ r$; pero con esta cantidad sabemos que la bóveda ha de venirse abajo hundiéndose por el vértice y elevándose por los riñones según se deduce de lo expuesto en los núms. 29 y 35, y por otra parte ningún arco puede con unas mismas dimensiones y a un mismo tiempo adquirir dos movimientos tan contrarios como son los que se representan en las Figs. 12 y 13 y que evitan respectivamente las condiciones (D) y (E) o sus derivadas (F) y (G): luego forzosamente ha de ser falso el supuesto que hace negativo el primer miembro de la condición (G) en el caso de referirnos a una bóveda de medio punto y uniformemente gruesa. De aquí se infiere que aunque sean dos las condiciones sacadas para evitar en las bóvedas simétricas el movimiento puro de rotación, nunca habrá necesidad de discutir sino solamente una de ellas. La única dificultad que puede presentarse es el saber cuál de las dos debe convenir a la cuestión, pero cuando este conocimiento no nos lo proporcione la simple inspección de la figura que se quiere dar a la bóveda, tomaremos arbitrariamente cualquiera de las dos condiciones, y su consideración nos mostrará prontamente si la elección está mal o bien hecha. Por ejemplo, si en una media naranja queremos averiguar el menor grueso que pueden tener las dovelas siendo todas de un mismo espesor; como en esta especie de bóvedas los trozos inferiores se hallan a igualdad de arcos, más robustos o cargados que los superiores, deberemos preferir la condición (G) a la (F), porque en caso de arruinarse la bóveda por uno de los dos movimientos expresados en las Figs. 12 y 13, es más natural que lo haga

adquiriendo el de la Fig. 13 que el de la Fig. 12. Mas si prescindiendo de esta reflexión eligiésemos ciegamente la condición (F), viéramos efectuado el cálculo que quedaba completamente satisfecho por pequeño que fuese el grueso de las dovelas: y esta misma particularidad nos avisaría que la dificultad no está en hacer que la media naranja circular deje [47/48] de adquirir el movimiento de la Fig. 12, sino el que expresa por medio de la Fig. 13.

37. Así, pues, aplicada la condición (G) al ejemplo propuesto, encontraremos estar el menor grueso posible de las dovelas entre 1/23 y 1/24 del radio del círculo interior generador. Con efecto, igualando a cero la diferencia de las expresiones

$$\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}=\frac{\frac{1}{3}\{(r+K)^3-r^3\}(r-r\cos\alpha_{\prime\prime})\operatorname{sen}\alpha_{\prime\prime}-\frac{1}{8}(\alpha_{\prime\prime}-\operatorname{sen}\alpha_{\prime\prime}\cos\alpha_{\prime\prime})\{(r+K)^4-r^4\}}{r-r\cos\alpha_{\prime\prime}}$$

$$\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}=\frac{\frac{1}{3}\{(r+K)^4-r^3(r+K)\}(1-\cos\alpha_{\prime})\operatorname{sen}\alpha_{\prime}-\frac{1}{8}(\alpha_{\prime}-\operatorname{sen}\alpha_{\prime}\cos\alpha_{\prime})\{(r+K)^4-r^4\}}{r-(r+K)\cos\alpha_{\prime}},$$

y ordenando después con respecto a las potencias de K, se ve corresponder próximamente el máximo de K a las dos sustituciones $\alpha'' = 30º$, y $\alpha_{\prime\prime} = 70º$, en el supuesto de contentarnos con las que de diez en diez grados se pueden dar a estos ángulos: con lo cual despreciando las potencias de K superiores al cuadrado, se tendrá

$$0{,}0123K^2 + 0{,}1966K - 0{,}0083 = 0,$$

que da $K = 0{,}0421 = 1/23{,}7$, esto es un valor mayor que $1/24\ r$ y menor que $1/23\ r$.

M. Rondelet asegura en su Arte de construir que las medias naranjas no tienen empuje alguno, porque al aplicarles una fórmula suya que es un caso particular de la condición (F), observa que queda satisfecha haciendo $K = 0$; y aunque esto último sea cierto, la consecuencia que de aquí saca es falsa según el cálculo que acabamos de indicar. El salir cierta la condición (F) con cualquier valor de K nos advierte solamente que el movimiento de la Fig. 12 es imposible en las medias naranjas, pero no el representado por la Fig. 13, que debe verificarse realmente siendo K menor que $r/23{,}7$. [48/49]

Capítulo tercero

De las condiciones necesarias para que no se verifiquen los cinco movimientos mixtos y reducción de todas las generales a otras más sencillas

38. Daremos principio a este capítulo por determinar las cinco condiciones correspondientes a los movimientos deducidos de las permutaciones *rrt*, *trr*, *trt*, *tr*, y *rt*, suponiendo en la discusión las reflexiones que nos conducen a la descomposición que seguimos, por ser de la misma naturaleza que las expuestas en los capítulos precedentes. Hecha esta advertencia, empecemos por los movimientos de primera y segunda especie que se representan en las Figuras 3 y 4, descomponiendo inmediatamente el trozo $M'N_{\iota} = M' + M_{\iota}$ en dos fuerzas F' y F_{ι} que pasen respectivamente por los puntos M' y N_{ι}, de suerte que la segunda fuerza y el trozo $M_{\iota\iota}N_{\iota}$ formen en la Fig. 3 equilibrio de rotación con respecto al punto $M_{\iota\iota}$, y equilibrio de traslación con relación a la junta $N_{\iota\iota}M_{\iota\iota}$ en la Fig. 4 suponiendo que el trozo $M_{\iota\iota}N_{\iota}$ de esta figura se dirige a resbalar en dirección de $N_{\iota\iota}$ a $M_{\iota\iota}$. Así, con la primera descomposición tendremos

$$F' \cos(180^\circ - \lambda' - \alpha'') - F' \operatorname{tang} f \operatorname{sen}(180^\circ - \lambda' - \alpha'') = \frac{F' \cos(180^\circ - \lambda' - \alpha'' + f)}{\cos f} =$$

$$= \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\alpha'' - f) \operatorname{tang} \lambda' - \cos(\alpha'' - f)}{(z_{\iota} - x')\cos f \cdot \operatorname{tang} \lambda' + (u_{\iota} + y') \cos f} \right\} Mom_{\iota}(M_{\iota} + M') =$$

$$= \frac{\{(u_\iota + y') \text{ tang } (\alpha'' - f) + z_\iota - x'\} \cos(\alpha'' - f) Mom_u(M_u + M')}{\{(u_\iota + y')(x_u - x') - (y_u + y')(z_\iota - x')\}\cos f} -$$

$$- \frac{\{(y_u + y') \text{ tang}(\alpha'' - f) + x_u - x'\} \cos(\alpha'' - f) Mom_\iota(M_\iota + M')}{\{(u_\iota + y')(x_u - x') - (y_u + y')(z_\iota - x')\}\cos f}$$

y esta cantidad expresará (véanse los núms. 6 y 24) el empuje que la fuerza F' produce contra el trozo $M'N''$ en la Fig. 3 para hacerlo resbalar en dirección de M'' a N''. Con la segunda descomposición será

$$Mom''F' = \left\{ \frac{(z'' - x') \text{ tang } \lambda' - (u'' - y')}{(z_\iota - x') \text{ tang } \lambda' + (u_\iota + y')} \right\} Mom_\iota(M_\iota + M') =$$

$$= \frac{\{(u_\iota + y')(z'' - x') + (z_\iota - x')(u'' - y')\}(M' + M_u)}{(u_\iota + y') \text{ tang}(\alpha_u + f) - (z_\iota - x')} -$$

$$- \frac{\{(z'' - x') + (u'' - y') \text{ tang}(\alpha_u + f)\} \; Mom_\iota(M_\iota + M')}{(u_\iota + y') \text{ tang}(\alpha_u + f) - (z_\iota - x')}$$

que indicará el momento de F', o el esfuerzo con que el trozo $N_\iota M'$ intenta en la Fig. 4 hacer girar al inferior $M'N''$ por el punto N'' de apoyo. Restada la primera expresión de

$$(M'' - M') \frac{\cos(\alpha'' - f)}{\cos f},$$

y la segunda de Mom'' $(M'' - M')$ resultarán las condiciones: [49/50]

$$(M''-M') \cos(\alpha''-f) - \frac{\{(u_\iota + y') \text{ tang}(\alpha''-f) + z_\iota - x\} \cos(\alpha''-f) Mom_u(M_u + M')}{(u_\iota + y')(x_u - x') + (x' - z_\iota)(y_u + y')} +$$

$$+ \frac{\{(y_u + y') \text{ tang}(\alpha'' - f) + x_u - x'\} \cos(\alpha'' - f) Mom_\iota(M_\iota + M')}{(u_\iota + y')(x_u - x') + (y_u + y')(x' - z_\iota)} \geq 0,$$

$$Mom''(M''-M')-\frac{\{(u_\iota+y')(z''-x')+(z_\iota-x')(u''-y')\}(M_u+M')}{(u_\iota+y')\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+x'-z_\iota}+$$

$$+\frac{\{(u''+y')\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+z''-x'\}Mom_\iota(M_\iota+M')}{(u_\iota+y')\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+x'-z_\iota}\geq 0,$$

que sirven para impedir respectivamente los movimientos de primera y segunda especies.

39. Si siguiendo los mismos principios de simplificación que en los capítulos antecedentes, hacemos

$$a'''=(u_\iota+y')(x_u-x')+(x'-z_\iota)(y_u+y'),$$

$$a^{Iv}=(u_\iota+y')\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+x'-z_\iota,$$

$$b'''=(y_u+u')\operatorname{tang}(\alpha''-f)+x_u-z_\iota,$$

$$b^{Iv}=(u''+u_\iota)\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+z''-z_\iota,$$

$$c'''=(y_u+y')\operatorname{tang}(\alpha''-f)+x_u-x',$$

$$c^{Iv}=(u''-y')\operatorname{tang}(\alpha_u+f)+z''-x',$$

$$d'''=(u_\iota+y')\operatorname{tang}(\alpha''-f)+z_\iota-x',$$

$$d^{Iv}=(u_\iota+y')(z''-x')+(z_\iota-x')(u''-y'),$$

y observando que entre estas cantidades existen las ecuaciones

$$\begin{cases}a'''\operatorname{tang}(\alpha''-f)-b'''x'+c'''z_\iota-d'''x_u=0\\-b'''+c'''-d'''=0\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}a^{Iv}z''-b^{Iv}x'+c^{Iv}z_\iota-d^{Iv}\operatorname{tang}(\alpha_u+f)=0\\a^{Iv}-b^{Iv}+c^{Iv}=0\end{cases}\tag{2}$$

nos será fácil transformar las condiciones anteriores, sustituyendo por $Mom''(M''-M')$, $Mom_u(M_u+M')$ y $Mom_\iota(M_\iota+M')$ sus expresiones (véase el núm. 24), en

$$a'''M'' - b'''M'X' + c'''M_{\iota}Z_{\iota} - d'''M_{u}X_{u} \geq 0, \quad \text{(H)}$$

$$a^{Iv}M''Z'' - b^{Iv}M'X' + c^{Iv}M_{\iota}Z_{\iota} - d^{Iv}M_{u} \geq 0, \quad \text{(I)}$$

y haciendo desaparecer los coeficientes $-a'''$, b''', a^{Iv} y b^{Iv} por medio de la ecuación (1) y (2), en estas otras

$$\begin{aligned} &\frac{(x'-z')}{d'''}\left\{M''\cot(\alpha''-f) - \frac{M'X' - M_{\iota}Z_{\iota}}{x'-z_{\iota}}\right\} + \\ &+\frac{(x_{u}-x')}{c'''}\left\{M''\cot(\alpha''-f) - \frac{M_{u}X_{u} - M'X'}{x_{u}-x'}\right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(z''-z_{\iota})}{d^{Iv}}\left\{\frac{M''Z'' - M'X'}{z''-x'} - \frac{M''Z'' - M_{\iota}Z_{\iota}}{z''-z_{\iota}}\right\} + \\ &+\frac{\operatorname{tang}(\alpha_{u}+f)}{c^{Iv}}\left\{\frac{M''Z'' - M'X'}{z''-x'} - M_{u}\cot(\alpha_{u}+f)\right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Bajo estas dos formas se emplearán para ver si las bóvedas pueden o no adquirir alguno de los movimientos expresados en las Figs. 3 y 4, siguiendo el mismo método que se dio en el núm. 25 para discutir la condición correspondiente al movimiento puro de rotación. Para no hacer en estos tanteos [50/51] operaciones de suyo excusadas, y a fin de que las multiplicaciones y divisiones hechas con las condiciones del núm. 38 al transformarlas en las cuatro de éste, no produzcan error alguno de la naturaleza de los advertidos en el núm. 12, es necesario elegir solamente aquellos trozos en que se verifiquen las circunstancias siguientes.

40. Si refiriendo la Fig. 19 al movimiento mixto de primera especie, la línea tirada por los puntos N_{ι} y M' forma con la junta $M''N''$ el ángulo $N_{\iota}m\,M''$ mayor $90-f$, la fuerza F' no podrá en este caso, por formar otro ángulo más abierto con la misma junta, empujar al trozo $M'N''$ para que suba resbalando sobre el plano $M''N''$; y esto nos hace ver que debemos escoger aquellos puntos N_{ι} y M' en que se tenga $N_{\iota}m\,M'' < 90-f$. Suponiendo en efecto $N_{\iota}\,m\,M'' < 90-f$, y en virtud de la condición tercera del núm. 4 debiendo ser $M_{u}N_{\iota}M' < 180$, cuales-

quiera que sean los puntos M_{u}, N_{ι} y M'; inferiremos de aquí estas otras dos $M_{u}n$ $M'' < 90 - f$ y $M_{u}p\, M'' < 90 - f$, en el supuesto de pasar las líneas $M_{u}n$ y $M_{u}p$ respectivamente por los puntos M' y N_{ι} : luego el seno de $M_{u}N_{\iota}M'$ y los cosenos de $N_{\iota}m\,M'' + f$, $M_{u}nM'' + f$ y $M_{u}pM'' + f$ serán positivos, y de consiguiente las cantidades a''', b''', c''' y d''', pues

$$\text{sen}(M''N_{\iota}M') = \frac{(u_{\iota} + y')(x_{u} - x') + (x' - z_{\iota})(y_{u} + y')}{(M_{u}N_{\iota})(N_{\iota}M')},$$

$$\cos(M_{u}pM'' + f) = \frac{\cos(\alpha'' - f)}{M_{u}N_{\iota}}\,\{(y_{u} - u_{\iota})\,\text{tang}(\alpha'' - f) + x_{u} - z_{\iota}\},$$

$$\cos(M_{u}nM'' + f) = \frac{\cos(\alpha'' - f)}{M_{u}N'}\{(y_{u} + y')\,\text{tang}(\alpha'' - f) + x_{u} - x'\}, \text{ y}$$

$$\cos(N_{\iota}mM'' + f) = \frac{\cos(\alpha'' - f)}{N_{\iota}M'}\,\{(u_{\iota} + y')\,\text{tang}(\alpha'' - f) + z_{\iota} - x'\}.$$

De la misma manera demostraríamos que los coeficientes a^{Iv}, b^{Iv}, c^{Iv} y d^{Iv} de la condición (I) deben también considerarse sólo en los casos de salir positivos, no olvidando primeramente que para que el trozo $M_{u}N_{\iota}$ pueda bajar resbalando por su junta $N_{u}M_{u}$, necesita ser $\alpha_{u} + f$ menor que 90 grados, y partiendo de las condiciones $N_{\iota}M'N'' < 180$, $M'\,rM_{u} < 90 + f$, $N''\,gM_{u} < 90 - f$ y $N''\,sM_{u} < 90 + f$ que en el concepto de referirse ahora la Fig.19 al movimiento mixto de segunda especie, y de pasar las líneas $M'r$, $N''g$ y $N''s$ respectivamente por los puntos N_{ι}, M' y N_{ι}, se sacan: la primera, porque de verificarse lo contrario la dirección de la fuerza F' pasaría [51/52] por abajo del punto N'', y no podría hacer que el trozo $M'N''$ girase alrededor de este punto en el sentido que suponemos: la segunda condición, por lo establecido en la cuarta del núm. 4: y la tercera y última por ser una consecuencia inmediata de las dos anteriores.

41. Supuestas, pues, las cantidades a''', a^{Iv}, b''', b^{Iv} etc. positivas, si considerando ahora que las bóvedas son simétricas, hacemos $M_{u} = M'$ en la condición (H), y $M'' = M_{\iota}$ en la (I), veremos que las siguientes

$$M''(x' - z_\iota)\cot(\alpha'' - f) - (M'X' - M_\iota Z_\iota) \geq 0 \qquad \text{(K)}$$

$$M_\iota Z_\iota - M'X' - M_{\iota\iota}(z_\iota - x')\cot(\alpha_{\iota\iota} + f) \geq 0 \qquad \text{(L)}$$

en que se convierten aquellas, son suficientes unidas a las (D) y (E) para evitar en las bóvedas simétricas que tres trozos situados de cualquier manera tomen los movimientos mixtos de primera y segunda especie. Porque dando a las condiciones (H) y (I) las seis formas que resultan de hacer desaparecer sucesivamente dos de sus cuatro coeficientes por medio de las ecuaciones (1) y (2), se observará: primero, que todas ellas se componen de expresiones o funciones enteramente semejantes a los primeros miembros de las condiciones (D) y (E) que ya tenemos dadas, o de las dos (K) y (L) que acabamos de establecer: segundo, que sus variables están concebidas bajo los mismos límites que los supuestos $M_{\iota\iota} = M'$ y $M'' = M_\iota$ prescriben a los trozos contenidos en las condiciones (D), (E), (K) y (L), siempre que cada una de dichas transformaciones se refiera a aquel o aquellos casos que la convienen de los ocho numerados en el núm. 30 para expresar todas las diferentes relaciones de desigualdad que pueden existir entre los trozos M'', M' y $M_{\iota\iota}$ cuando se consideran de una manera general según lo hicimos en el núm. 31 con las transformaciones de la condición (C). Podemos igualmente demostrar de una forma parecida a la del núm. 29 que las condiciones (K) y (L) impiden directamente [52/53] y por sí solas los movimientos expresados en las Figs. 14 y 15, esto es, que la bóveda se abra por cinco trozos situados simétricamente con respecto a la clave, los dos inferiores con movimiento de traslación del intradós al extradós, como lo representa la Fig. 14, o en sentido contrario según se ve en la Fig. 15 y los tres superiores apoyados en los puntos $M_{\iota\iota}$, N_ι, n' y M', o N_ι, m_ι, M' y N'', según nos refieramos a la Fig. 14 o a la Fig. 15.

42. Haciendo en la condición (K) $M_\iota = 0$, y en la condición (L) $M' = 0$, se tiene

$$M''\cot(\alpha'' - f) - \frac{M'X'}{K + x'} \geq 0, \qquad \text{(M)}$$

$$\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - M_{\iota\iota}\cot(\alpha_{\iota\iota} + f) \geq 0, \qquad \text{(N)}$$

y estas dos condiciones bastan en la mayor parte de casos para impedir completamente en las bóvedas simétricas los movimientos mixtos de primera y segunda especie. Nos convenceremos de esto, si poniendo las condiciones (K) y (L) bajo la forma

$$M'' \cot(\alpha'' - f) - \frac{M'X'}{K + x'} + \frac{(K + z_\iota)}{x' - z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K + z_\iota} - \frac{M'X'}{K + x'}\right\} \geq 0,$$

$$\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - M_u \cot(\alpha_u + f) + \frac{x'}{z_\iota - x'}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M'X'}{x'}\right\} \geq 0,$$

y teniendo presente que en la primera debe ser $x' > z_\iota$ y en la segunda $z_\iota > x'$, observamos que los primeros miembros de estas condiciones no son otra cosa que una suma de cantidades positivas, siendo ciertas las condiciones (M), (N) y las correspondientes al movimiento puro de rotación anotadas con las letras (F) y (G).

43. Apliquemos primeramente la condición (M) a la misma bóveda de medio punto discutida en los capítulos anteriores; y veamos en qué casos puede o no adquirir el movimiento mixto de primera especie. Hagamos tang f =0,31 y K =1/8r, una vez que por lo dicho en el número 20 y 34 son estos valores los menores que pueden tener tang f y K para impedir los movimientos puros de traslación y rotación. Con esto tendremos mínimo de $M'' \cot(\alpha'' - f) = M'' \cot(90^\circ - f)$ (véase núm. 20) = 90º (rK + 1/2 K^2) tang f = 0,0646 r^2: máximo de $M'X' / (K + x') =$ 0.0798 r^2 (véase nº 34), y $M'' \cot(\alpha'' - f) - M'X' / (K + x') = -0.0152\ r^2$, que es una cantidad negativa. Luego es necesario para evitar en esta clase de bóvedas el movimiento [53/54] mixto de primera especie, o dar a las dovelas un espesor mayor que aquél con que se logra impedir el movimiento de rotación, o bien suponer el rozamiento mayor que el puramente necesario para sofocar el movimiento de traslación. Si hacemos tang f = 1/2, que es el supuesto más comúnmente acreditado por la experiencia, con este valor están ya las bóvedas en cuestión libres de tomar el movimiento mixto de primera especie, sin necesidad de aumentar el espesor K = 1/8 r: efectivamente, será en dicho caso $M''\cot(\alpha'' - f) = M''$ tang f = 0,104 r^2, y por consecuencia el primer miembro de la condición (M), una cantidad positiva.

44. En el ejemplo anterior hemos sólo considerado la condición (M) sin atender a la (N), porque entre ellas existe la misma correspondencia que expresamos en el núm. 36 con respecto a las condiciones (F) y (G): es decir que una sola de las dos (M) y (N) podrá dejar o no de verificarse según el diferente espesor que se den a aquellas partes que influyen más directamente en la menor o mayor robustez del arco, mientras que la otra condición permanece constantemente siendo cierta bajo todas estas diferentes sustituciones: pues es incompatible, según advertimos también en el número ya citado, que una bóveda pueda tomar a un mismo tiempo dos movimientos diametralmente opuestos, y pasar del estado de reposo al de movimiento por aumentar en ella aquellas dimensiones que visiblemente favorecen su solidez a medida que son mayores.

45. Dijimos en el núm. 17 que la bóveda adintelada era, a pesar de satisfacer en todos sus puntos a la ecuación (10) de aquel capítulo, una de las más expuestas a adquirir el movimiento mixto de primera especie; y ahora vamos a determinar la relación que debe existir entre sus dimensiones para evitar el referido movimiento. Llamemos l a la semiluz, a el ángulo de arranque, y haciendo $f = 0$ a fin de simplificar más el cálculo, tendremos $M'' \cot \alpha'' = l\,K \cot a + 1/2\,K^2$, $M'X' \,/\, (K + x') = (1/2\, l^2 \cot^2 a - 1/6\quad K^2) \operatorname{tang}^2 \alpha'$ [54/55] $= 1/2\, l^2 - 1/6\quad K^2 \operatorname{tang}^2 a$ pues la expresión $(1/2\, l^2 \cot^2 a - 1/2\, K^2) \operatorname{tang}^2 \alpha'$ crece a medida que es mayor el ángulo α', y este tiene por límite el ángulo a de arranque: finalmente la condición (M), esto es, $l\,K \cot a + 1/2\,K^2 - 1/2\, l^2 + 1/6\,K^2 \operatorname{tang}^2 a \geq 0$, nos dará alineando K

$$\frac{K}{l} \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^4 a}}{\operatorname{tang} a + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 a} \qquad (5)$$

Si al ángulo de arranque damos diferentes valores, observaremos que el máximo del segundo miembro corresponde próximamente a la sustitución $a = 60^{\circ}$, y en este caso sale, al poco más o menos, $K/l \geq 1/2$ así que, con dar a la clave un valor igual a la cuarta parte de la luz, se sujeta esta bóveda a que en ningún caso adquiera los movimientos mixtos hasta aquí considerados, cualquiera que sea el ángulo de arranque.

46. Pasemos ya a hablar de los movimientos mixtos de tercera, cuarta y quinta especie; y con esta mira descompongamos como siempre el trozo $N_{\iota}M'$ de las Figuras 5, 6 y 7, en las fuerzas F' y F_{ι}, haciendo en la figura 5 que formen con las juntas $M'N'$ y $M_{\iota}N_{\iota}$ los ángulos $\varphi M'N'$ y φmN_{ι} iguales a $90 - f$, y pase además la primera fuerza por el punto M_{ι}: en la Fig. 6 que las dos fuerzas pasen respectivamente por los puntos N' y M', formando la componente F' con la junta $M'N'$ el ángulo $\varphi N'M' = 90 + f$: y últimamente en la figura 7, que pasando la fuerza F' por M', y la F_{ι} por el punto N_{ι}, esta última se equilibre con el esfuerzo que el trozo $M_{\iota\iota}N_{\iota}$ hace para resbalar en dirección de $N_{\iota\iota}$ a $M_{\iota\iota}$. Hallados de este modo los diferentes valores de F' y F_{ι} correspondientes a cada descomposición, veremos que en el primer caso,

$$\frac{(M' + M_{\iota}) \cos(\alpha_{\iota} + f)}{\operatorname{sen}(\alpha' + f + \alpha_{\iota} + f)}\{(z'' - x') \cos(\alpha' + f) - (u'' - y') \operatorname{sen}(\alpha' + f)\}$$

es el momento de F' con respecto al punto exterior N'' para hacer girar en la Fig. 5 al trozo $M'N'$ por el punto N': que en el segundo caso [55/56]

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)\, Mom_{\iota}(M_{\iota} + M')}{(x_{\iota} - z') \cos f \cos(\alpha' + f) + (y_{\iota} + u') \cos f \operatorname{sen}(\alpha' + f)}$$

representa el empuje que F' produce en la Fig. 6 para hacer resbalar al trozo $N'M''$ en dirección de M'' a N'': y últimamente que

$$\frac{\{(u' + y') \operatorname{tang}(\alpha'' - f) + (z_{\iota} - x')\}(M_{\iota\iota} + M') \cos(\alpha'' - f)}{(u_{\iota} + y') \operatorname{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) \cos f - (z_{\iota} - x') \cos f} -$$

$$- \frac{\{\operatorname{tang}(\alpha'' - f) + \operatorname{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f)\} Mom_{\iota}(M_{\iota} + M') \cos(\alpha'' - f)}{(u_{\iota} + y') \operatorname{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) \cos f - (z_{\iota} - x') \cos f}$$

expresa el empuje que la misma fuerza tiene en la Fig. 7 para hacer mover al trozo $N'M''$ con igual movimiento que en la figura anterior. Restando estas tres cantidades de la resistencia que el trozo $N'N''M''M'$ opone en cada uno de estos casos, tendremos las condiciones que siguen

$$
\begin{aligned}
&Mom''(M'' - M') - \\
&- \frac{(M' + M_\iota)\cos(\alpha_\iota + f)}{\text{sen}(\alpha' + f + \alpha_\iota + f)}\{(z'' - x')\cos(\alpha' + f) - (u'' - y')\,\text{sen}(\alpha' + f)\} \geq 0
\end{aligned}
\tag{O}
$$

$$
(M'' - M')\cos(\alpha'' - f) - \frac{\text{sen}(\alpha'' - f - \alpha' - f)\,Mom_\iota(M_\iota + M')}{(x_\iota - z')\cos(\alpha' + f) + (y_\iota + u')\,\text{sen}(\alpha' + f)} \geq 0 \tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
&M'' - M' - \frac{(M_{\iota\iota} + M')\{(u' + y')\,\text{tang}(\alpha'' - f) + z_\iota - x'\}}{(u_\iota + y')\,\text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) - (z_\iota - x')} - \\
&- \frac{-Mom_\iota(M_\iota + M')\{\text{tang}(\alpha'' - f) + \text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f)\}}{(u_\iota + y')\,\text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) - (z_\iota - x')} \geq 0
\end{aligned}
\tag{Q}
$$

para impedir dichos movimientos.

47. Después de probar en estas tres condiciones que los coeficientes que dividen o multiplican a las cantidades $M_\iota + M'$, $Mom''\,(M'' - M')$, $Mom_\iota\,(M' + M_\iota)$, etc., deben considerarse acompañados del signo positivo, a causa de lo expuesto en el núm. 4, y a fin de que el trozo $M' + M_\iota$ tenga en las tres figuras un esfuerzo efectivo contra el inferior de su derecha; pasaríamos a dar a las mismas condiciones las formas convenientes para poderlas discutir mejor, empleando el método de tanteos según se ha hecho en los demás movimientos; pero dando todo esto por efectuado, pues su ejecución no presenta dificultad ninguna, sólo nos detendremos al presente en referir dichas condiciones al caso de ser simétricas las bóvedas.

48. La condición (Q) haciendo $a^v = (u_\iota + y')\,\text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) - (z_\iota - x')$, $b^v = \text{tang}(\alpha'' - f) + \text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f)$, $d^v = (u_\iota + y')\,\text{tang}(\alpha'' - f) - (x' - z_\iota)$, y teniendo presente que entre estas cantidades existe la ecuación

$$
a^v\,\text{tang}(\alpha'' - f) - b^v(x' - z_\iota) - d^v\,\text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f) = 0
$$

podrá ponerse bajo las dos formas:

$$
\begin{aligned}
&b^v\{M''(x' - z_\iota)\cot(\alpha'' - f) - M'X' + M_\iota Z_\iota\} + \\
&+ d^v\,\text{tang}(\alpha_{\iota\iota} + f)\{M''\cot(\alpha'' - f) - M_{\iota\iota}\cot(\alpha_{\iota\iota} + f)\} \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a^v\,\text{tang}(\alpha'' - f)\{M''\cot(\alpha'' - f) - M_{\iota\iota}\cot(\alpha_{\iota\iota} + f)\} + \\
&+ b^v\{M_\iota Z_\iota - M'X' - M_{\iota\iota}(z_\iota - x')\cot(\alpha_{\iota\iota} + f)\} \geq 0.
\end{aligned}
$$

[56/57]

Por la primera forma se ve que el movimiento mixto de quinta especie no puede tener lugar en bóvedas simétricas mientras la relación de desigualdad de los trozos que entran a producir el empuje esté indicada por cualquiera de las cuatro permutaciones $M_{\prime\prime}M''M'M_{\prime}$, $M''M_{\prime\prime}M'M_{\prime}$, $M''M'M_{\prime\prime}M_{\prime}$, $M''M'M_{\prime}M_{\prime\prime}$ (véase el núm. 30), y sean ciertas las condiciones (B) y (K) correspondientes a los movimientos puro de traslación y mixto de primera especie: por la segunda forma siempre que la referida relación esté representada por cualquiera de las otras cuatro permutaciones restantes $M''M_{\prime\prime}M_{\prime}M'$, $M_{\prime\prime}M''M_{\prime}M'$, $M_{\prime\prime}M_{\prime}M''M'$, $M_{\prime\prime}M_{\prime}M'M''$, y se verifiquen además la misma condición (B) que acabamos de mencionar y la correspondiente al movimiento mixto de segunda especie que quedó anotado con la letra (L). Por lo tanto es imposible que en semejantes bóvedas tenga lugar el movimiento mixto de quinta especie, no teniendo el puro de traslación ni los dos mixtos de primera y segunda especies; y de consiguiente enteramente superfluo el tener presente la condición (Q) para tales casos.

49. Para referir las condiciones (O) y (P) a la misma especie de bóvedas haremos en la primera $M_{\prime} = M'$, y saldrá

$$M''Z'' - M'X' - M'(z'' - x')\cot(\alpha' + f) \geq 0 \qquad (6)$$

En la segunda (P) supondremos primero que la junta $M'N'$ (Fig. 16) cae al mismo lado que $M_{\prime}N_{\prime}$, con lo cual el trozo M'' debe ahora llamarse M', el trozo M' convertirse en $-M_{\prime}$ y el tercero $M_{\prime}$ denominarse $M_{\prime\prime}$: hechas estas sustituciones en la condición (P) da

$$(M' + M_{\prime})\cos(\alpha' - f) - \frac{Mom_{\prime\prime}(M_{\prime\prime} - M_{\prime})\,\mathrm{sen}(\alpha' - f + \alpha_{\prime} - f)}{(x_{\prime\prime} - z_{\prime})\cos(\alpha_{\prime} - f) - (y_{\prime\prime} - u_{\prime})\,\mathrm{sen}(\alpha_{\prime} - f)} \geq 0,$$

y haciendo $M' = M_{\prime}$ tendremos

$$M_{\prime}(x_{\prime\prime} - z_{\prime})\cot(\alpha_{\prime} - f) - M_{\prime\prime}X_{\prime\prime} + M_{\prime}Z_{\prime} \geq 0 \qquad (7)$$

La condición (6) se refiere a impedir en las bóvedas simétricas que los trozos $M'N'' = M_{\prime}n_{\prime}$ (Fig. 16) adquieran movimiento de rotación alrededor de los puntos N'' y $n_{\prime}$, impedido por el esfuerzo que el trozo $N_{\prime}N'M'M_{\prime}$ produce resbalando so-

bre las juntas [57/58] $M'N'$ y $M_{\iota}N_{\iota}$ y sostenido al mismo tiempo por los puntos M' y M_{ι} de los trozos inferiores. La condición (7) se dirige a impedir el movimiento en sentido contrario y manifestado por la Fig. 17, en la cual los trozos inferiores $M_{u}N_{\iota} = m'N'$ girando alrededor de los puntos M_{u} y m' empujan al del medio $M'N'N_{\iota}M_{\iota}$ para que suba con movimiento de traslación por las juntas $M'N'$ y $M_{\iota}N_{\iota}$, apoyado en los puntos exteriores N' y N_{ι} de los trozos laterales.

50. Puestas las condiciones (6) y (7) de este modo

$$(z''-x')\left\{\frac{M''Z''}{z''}-M'\cot(\alpha'+f)\right\}+x'\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}\geq 0,$$

$$(x_{u}-z_{\iota})\left\{M_{\iota}\cot(\alpha_{\iota}-f)-\frac{M_{u}X_{u}}{K+x_{u}}\right\}+(K'+z_{\iota})\left\{\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{K+z_{\iota}}-\frac{M_{u}X_{u}}{K+x_{u}}\right\}\geq 0,$$

aparecen sus primeros miembros iguales a la suma de los términos

$$M''Z''/z''-M'\cot(\alpha'+f)$$

y $M''Z''/z''-M'X'/x'$, $M_{\iota}\cot(\alpha_{\iota}+f)-M_{u}X_{u}/(K+x_{u})$ y $M_{\iota}Z_{\iota}/(K+z_{\iota})-M_{u}X_{u}/(K+x_{u})$, multiplicados por los coeficientes $z''-x'$, x', $x_{u}-z_{\iota}$ y $K+z_{\iota}$: estos coeficientes han de ser positivos, guardando el orden que deben tener en su colocación los trozos M_{u}, $M_{\iota}M'$ y M'': y los términos $M''Z''/z'-M'\cot(\alpha'+f)$, $M''Z''/z''-M'X'/x'$, etc., son funciones parecidas a los primeros miembros de las condiciones (F), (G), (M) y (N). Por consiguiente, si con respecto a los términos contenidos en las condiciones (M) y (N) sucede lo mismo que se dijo en el núm. 33 con relación a los de las condiciones (F) y (G), se tendrá

$$\frac{M''Z''}{z''}-M'\cot(\alpha'+f)>0,$$

$$\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}>0,$$

$$M_{\iota}\cot(\alpha_{\iota}+f)-\frac{M_{u}X_{u}}{K+x_{u}}>0,$$

$$\frac{M_{\iota}Z_{\iota}}{K+z_{\iota}}-\frac{M_{u}X_{u}}{K+x_{u}}>0;$$

lo cual prueba que en casos semejantes los movimientos de tercera y cuarta especies quedan sofocados en el hecho de no tener lugar el puro de rotación y los mixtos de primera y segunda especies. Bajo este concepto podemos ya asegurar que la bóveda de medio punto, tal como la hemos considerado en el núm. 43, se mantendrá firme sin adquirir ninguna especie de movimiento.

51. Lo dicho en el núm. anterior prueba la inutilidad de las fórmulas que hay sacadas para determinar el grueso de machones, suponiendo que éstos giran alrededor [58/59] de los puntos exteriores de sus bases, impulsados por la fuerza que el trozo superior del medio produce al tiempo de resbalar por sus juntas de lecho, cuestión que es exactamente la misma que la que se contiene en la condición (6) haciendo el trozo M'' igual al comprendido entre la clave y la base de uno de los machones. Por desgracia en la mayor parte de los problemas dirigidos al mismo objeto que vemos resueltos en las obras sobre empuje de bóvedas, se considera el trozo superior del arco con el movimiento que acabamos de mencionar; y así es que aparecen enteramente inútiles los únicos cálculos que en aquellas obras presentan a primera vista una aplicación directa a la práctica. Es verdad que M.M. Bossut, Prony y Couplet en la primera parte se su memoria, descomponen el trozo superior en dos fuerzas que hacen pasar por medio de las juntas de rotura, con lo cual resulta el momento de las componentes contra los machones, mayor que el que nosotros venimos a considerar en la condición (O) o su derivada (6) refiriendo el punto N'' (Fig. 16) al exterior de la base de los estribos; pero es fácil demostrar, según se insinuó ya en el número 11, que semejante proceder carece de fundamento. Porque si el objeto que se propusieron aquellos autores, era impedir que los machones girasen por el punto exterior de sus bases, y si en el instante de empezar el movimiento, las juntas de lecho correspondientes al trozo que hace veces de potencia, se abren por la parte exterior quedando solamente sostenidas por sus extremos interiores; es evidente que el empuje no tiene otros puntos por donde comunicarse que dichos extremos interiores, que son los únicos que unen al machón con lo restante de la bóveda, y sólo por ellos deben hacerse pasar las componentes de la fuerza que obra contra los estribos.

52. En virtud de lo expuesto en este y demás capítulos precedentes se ve que la discusión completa para asegurarse de la solidez de un arco que no es simétrico, exige cálculos muy largos y embarazosos por los muchos términos y variables que contienen [59/60] las siete fórmulas (A), (C), (H), (I), (O), (P) y (Q); y esta complicación que por sí sola es ya un verdadero obstáculo para que la aplicación de las fórmulas referidas sea de uso frecuente en la práctica, nos mueve a ver cómo se puede en lugar de ellas sustituir otras que tengan una forma más sencilla y expedita para todos los casos. Aquellas siete condiciones, como deducidas directamente de la Teórica, manifiestan bajo la forma que tienen, cuándo las bóvedas se mantienen firmes y cuándo se vienen abajo, según es positivo o negativo su primer miembro; pero si observamos que de estos dos objetos el principal que interesa más al arte de construir, es el saber que el arco, tal cual lo proyectamos, se halla con las proporciones debidas para sostenerse, notaremos que puede muy bien haber otras condiciones más sencillas que se dirijan solamente a manifestar esta circunstancia; y de su descubrimiento es de lo que vamos a ocuparnos ahora. Supongamos primeramente que se obliga al arco a cumplir con las condiciones

$$\left\{\begin{array}{l} M' \cot(\alpha' - f) - M'' \cot(\alpha'' + f) \geq 0, \\ M' \cot(\alpha' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f) \geq 0, \\ M'' \cot(\alpha'' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f) \geq 0, \\ M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0, \\ M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} - f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0, \end{array}\right. \qquad (8)$$

y desenvolviendo el primer miembro de la condición (A) del mismo modo que se hizo en el núm. 19, bajo las tres formas

$$a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f)\} +$$
$$+ c' \operatorname{tang}(\alpha_{\iota} + f)\{M' \cot(\alpha' + f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\},$$

$$a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\} +$$
$$+ b' \operatorname{tang}(\alpha' + f)\{M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f) - M' \cot(\alpha' + f)\},$$

$$\begin{aligned} &b' \operatorname{tang}(\alpha' + f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f)\} + \\ &+ c' \operatorname{tang}(\alpha_{\iota} + f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\}, \end{aligned}$$

se verá que la primera de estas expresiones se convierte en

$$\begin{aligned} &a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f)\{M' \cot(\alpha' - f) - M'' \cot(\alpha'' + f)\} + \\ &+ c' \operatorname{tang}(\alpha_{\iota} + f)\{M' \cot(\alpha' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\}, \end{aligned}$$ [60/61]

cambiando los signos de M'', M', α'', α', en el supuesto de estar todos los trozos en el lado izquierdo: la segunda en

$$\begin{aligned} &a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\} + \\ &+ b' \operatorname{tang}(\alpha' - f)\{M' \cot(\alpha' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\}, \end{aligned}$$

cambiando solamente el signo a M' y α', o lo que es lo mismo suponiendo que los dos trozos M_{ι} y M' están en el lado izquierdo y M'' en el derecho: la tercera se mantiene en

$$\begin{aligned} &b' \operatorname{tang}(\alpha' + f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f)\} + \\ &+ c' \operatorname{tang}(\alpha_{\iota} + f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} + f)\}, \end{aligned}$$

haciendo que conserven sus signos las cantidades M'', M', M_{ι}, α'', α' y α_{ι}, lo que equivale a suponer que el trozo M_{ι} está solo en el lado izquierdo, y los otros dos en el lado derecho: y últimamente la primera expresión vuelve a convertirse en

$$\begin{aligned} &a' \operatorname{tang}(\alpha'' - f)\{M'' \cot(\alpha'' - f) - M' \cot(\alpha' + f)\} + \\ &+ c' \operatorname{tang}(\alpha_{\iota} + f)\{M_{\iota} \cot(\alpha_{\iota} - f) - M' \cot(\alpha' + f)\}, \end{aligned}$$

mudando el signo a M_{ι} y α_{ι} en el concepto de suponer que los tres trozos se hallan en el lado derecho. Como no hay más casos que puedan ocurrir que los cuatro considerados, y en todos ellos aparece manifiestamente positivo el primer miembro de la condición (A), siendo ciertas las propuestas (8), se sigue que con dichas condiciones queda absolutamente impedido el movimiento puro de traslación.

53. Supongamos en segundo lugar que la bóveda satisface también a las condiciones

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{M''Z''}{K+z''}-\dfrac{M_uX_u}{K+x_u}>0,\ \dfrac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota}-\dfrac{M_uX_u}{K+x_u}>0,\ \dfrac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\dfrac{M_uZ_u}{x_u}>0,\ \dfrac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\dfrac{M'X'}{x'}>0,\\[2ex] \dfrac{M''Z''}{z''}-\dfrac{M_uX_u}{x_u}>0,\ \dfrac{M''Z''}{z''}-\dfrac{M'X'}{x'}>0,\ \dfrac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota}-\dfrac{M'X'}{K+x'}>0,\ \dfrac{M''Z''}{K+z''}-\dfrac{M'X'}{K+x'}>0.\end{array}\right\}(9)$$

Demos al primer miembro de la condición (C) las seis formas

$$\left(\frac{a''}{x''-z_\iota}\right)\{M''Z''(x_u-z_\iota)-M_uX_u(z''-z_\iota)+M_\iota Z_\iota(z''-x_u)\}\ +$$

$$+\left(\frac{b''}{x_u-z_\iota}\right)\{-M_uX_u(z_\iota-x')+M_\iota Z_\iota(x_u-x')-M'X'(x_u-z_\iota)\},$$

$$\left(\frac{a''}{x''-x'}\right)\{-M_uX_u(z''-x')+M''Z''(x_u-x')-M'X'(x_u-z'')\}\ +$$

$$+\left(\frac{c''}{x_u-x'}\right)\{-M_uX_u(z_\iota-x')+M_\iota Z_\iota(x_u-x')-M'X'(x_u-z_\iota)\},$$

$$\left(\frac{a''}{z_\iota-x'}\right)\{M_\iota Z_\iota(x'-z'')-M'X'(z_\iota-z'')+M''Z''(z_\iota-x')\}\ +$$

$$+\left(\frac{d''}{z_\iota-x'}\right)\{-M_uX_u(z_\iota-x')+M_\iota Z_\iota(x_u-x')-M'X'(x_u-z_\iota)\},$$

$$\left(\frac{b''}{z''-x_u}\right)\{-M'X'(z''-x_u)+M''Z''(x'-x_u)-M_uX_u(x'-z'')\}\ +$$

$$+\left(\frac{c''}{z''-x_u}\right)\{M''Z''(x_u-z_\iota)-M_uX_u(z''-z_\iota)+M_\iota Z_\iota(z''-x_u)\},$$

$$\left(\frac{b''}{z''-z_\iota}\right)\{M''Z''(x'-z_\iota)-M'X'(z''-z_\iota)-M_\iota Z_\iota(z''-x')\}+$$
$$+\left(\frac{d''}{z''-z_\iota}\right)\{M''Z''(x_u-z_\iota)-M_uX_u(z''-z_\iota)-M_\iota X_\iota(z''-x_u)\}, \qquad [61/62]$$

$$\left(\frac{c''}{z''-x'}\right)\{M''Z''(x'-z_\iota)-M'X'(z''-z_\iota)+M_\iota Z_\iota(z''-x')\}+$$
$$+\left(\frac{d''}{z''-x'}\right)\{-M_uX_u(z''-x')+M''Z''(x_u-x')-M'X'(x_u-z'')\},$$

que resultan de hacer desaparecer dos de las letras a'', b'', c'' y d'' por medio de las ecuaciones (3) del capítulo segundo; y sustituyendo en la primera de las seis formas anteriores

$$\frac{(x_u-z_\iota)(K+z'')}{K+x_u}+\frac{(z''-x_u)(K+z_\iota)}{K+x_u}$$

por $z''-z_\iota$ coeficiente de $M_u X_u$ en el primer corchete, y

$$\frac{(z_\iota-x')x_u}{z_\iota}+\frac{(x_u-z_\iota)x_\iota}{z_\iota}$$

por x_u-x' coeficiente de $M_\iota Z_\iota$ en el segundo corchete; en la segunda forma,

$$\frac{x_u}{z''}(z''-x')+\frac{x'}{z''}(x_u-z'')$$

por x_u-x' coeficiente de $M''\,Z''$ en el primer corchete, y

$$\frac{x_u}{z_\iota}(z_\iota-x')+\frac{x'}{z_\iota}(x_u-z_\iota)$$

por $x_u - x'$ coeficiente de $M_\iota Z_\iota$ en el segundo corchete; en la tercera forma,

$$\frac{(x' - z'')(K + z_\iota)}{K + x'} + \frac{(z_\iota - x')(K + z'')}{K + x'}$$

por $z_\iota - z''$ coeficiente de $M'\,X'$ en el primer corchete, etc.; y así por el mismo tenor en las demás formas, tendremos, por equivalentes a dicho primer miembro de (C), las ocho expresiones

$$a''(K+z'')\left\{\frac{M''Z''}{K+z''} - \frac{M_u X_u}{K+x_u}\right\} + \frac{a''(z''-x_u)(K+z_\iota)}{x_u - z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_u}{K+z_\iota} - \frac{M_u X_u}{K+x_u}\right\} +$$

$$+\frac{b''(z_\iota - x')x_u}{x_u - z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M_u X_u}{x_u}\right\} + b''x'\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$\frac{a''(z''-x')x_u}{x_u - x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_u X_u}{x_u}\right\} + \frac{a''(x_u - z'')x'}{x_u - x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\} +$$

$$+\frac{c''(z_\iota - x')x_u}{x_u - x'}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M_u X_u}{x_u}\right\} + \frac{c''(x_u - z_\iota)x'}{x_u - x'}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$\frac{a''(x'-z'')(K+z_u)}{z_\iota - x'}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota} - \frac{M'X'}{K+x'}\right\} + a''(K+z'')\left\{\frac{M''Z''}{K+z''} - \frac{M'X'}{K+x'}\right\} +$$

$$+ d''x_u\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M_u X_u}{x_u}\right\} + \frac{d''(x_u - z_\iota)x'}{z_\iota - x'}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$b''x'\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\} + \frac{b''(x'-z'')x_u}{z''-x_u}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_u X_u}{x_u}\right\} +$$

$$+\frac{c''(x_u - z_u)(K+z'')}{z''-x_u}\left\{\frac{M''Z''}{K+z''} - \frac{M_u X_u}{K+x_u}\right\} + c''(K+z_\iota)\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota} - \frac{M_u X_u}{K+x_u}\right\};$$

$$\frac{b''(x'-z_\iota)(K+z'')}{z''-z_\iota}\left\{\frac{M''Z''}{K+z''} - \frac{M'X'}{K+x'}\right\} + \frac{b''(z''-x')(K+z_\iota)}{z''-z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota} - \frac{M'X'}{K+x'}\right\} +$$

$$+\frac{d''(x_u - z_\iota)(K+z'')}{z''-z_\iota}\left\{\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M_uX_u}{K+x_u}\right\}+\frac{d''(z''-x_u)(K+z_\iota)}{z''-z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota}-\frac{M_uX_u}{K+x_u}\right\};$$

$$c''(K+z_\iota)\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}+\frac{c''(x'-z_\iota)(K+z'')}{z''-x'}\left\{\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}+$$

$$+\frac{d''(x_u-z'')x'}{z''-x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+d''x_u\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M_uX_u}{x_u}\right\};$$

$$\frac{a''(x'-z'')x_u}{x'-x_u}\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M_uX_u}{x_u}\right\}+\frac{a''(z''-x_u)x'}{x'-x_u}\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+$$

$$\frac{c''(x'-z_\iota)x_u}{x'-x_u}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\frac{M_uX_u}{x_u}\right\}+\frac{c''(z_\iota-x_u)x'}{x'-x_u}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$a''(K+z'')\left\{\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}+\frac{a''(z''-x')(K+z_\iota)}{x'-z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{K+z_\iota}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}+$$

$$+\frac{d''(z_\iota-x_u)x'}{x'-z_\iota}\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+d''x_u\left\{\frac{M_\iota Z_\iota}{z_\iota}-\frac{M_uX_u}{x_u}\right\};$$

[62/63]

siendo de advertir que la séptima y octava provienen de invertir los signos del numerador y denominador de los quebrados que multiplican las cantidades incluidas dentro de los corchetes de la segunda y tercera formas de las seis equivalentes al primer miembro de la condición (C), puestas al principio de este número. Verificadas, pues, las condiciones (9), es evidentemente positiva la primera expresión de las ocho que acabamos de poner, cuando se tiene $x_u > z_\iota$, $z'' > x_u$, $z_\iota > x'$ y $x_u > z_\iota$, esto es, cuando la relación de desigualdad de las abscisas x_u, z_ι, x' y z'' está representada por la permutación $z''x_uz_\iota x'$, siguiendo en éste el mismo convenio que hicimos en el núm. 30 para expresar la desigualdad de los trozos M'', M', M_ι y M_u: por igual razón diremos que es positiva la segunda expresión que le sigue, cuando cualquiera de las permutaciones $x_uz''z_\iota x'$ y $x_uz_\iota z''x'$ tiene lugar: la tercera expresión, cuando se verifica la permutación

$x_{\prime\prime}z_{\prime}x'z''$: la cuarta expresión con la permutación $x'z''x_{\prime\prime}z_{\prime}$: la quinta expresión, verificándose cualquiera de las permutaciones $z''x_{\prime\prime}x'z_{\prime}$ y $z''x'x_{\prime\prime}z_{\prime}$: la sexta expresión con la permutación $x_{\prime\prime}z''x'z_{\prime}$: la séptima con $x'z''z_{\prime}x_{\prime\prime}$, y la última con $z''x'z_{\prime}x_{\prime\prime}$. Pero es necesario advertir que en las diez permutaciones que llevamos consideradas, no están incluidas todas las relaciones de desigualdad que pueden existir entre las abscisas de los trozos M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$; y nosotros averiguaremos de un modo directo que, además de las diez anteriores, pueden verificarse las cuatro $x_{\prime\prime}x'z_{\prime}z''$, $x_{\prime\prime}x'z''z_{\prime}$, $x'x_{\prime\prime}z''z_{\prime}$ y $x'x_{\prime\prime}z_{\prime}z''$, siguiendo los mismos trámites que se emplearon en el núm. 30 para hallar las de los trozos M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$, y haciendo notar que aunque M'' y M' estén en el lado derecho de la clave, y sea de consiguiente $M'' > M'$, puede ser en este caso z'' mayor o menor que x', como nos convenceremos fácilmente si en la Fig. 2 hacemos que la junta $M'N'$ se aproxime tanto a la $M''N''$ que aquélla corte a la ordenada del punto N'', antes de salir ésta del espacio comprendido entre el intradós y extradós. La misma advertencia tiene lugar con respecto a las abscisas de los trozos $M_{\prime}$ y M' cuando están en el lado izquierdo, y a las de los trozos $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$ si éstos se hallan en el lado derecho: todo lo cual es causa de que el núm. de permutaciones posibles entre [63/64] las abscisas sea mayor que el de las correspondientes a los trozos.

Examinando ahora las cuatro permutaciones últimas, notaremos que la primera $x_{\prime\prime}x'z_{\prime}z''$ puede verificarse de los tres modos siguientes. Primeramente, estando todos los trozos en el lado izquierdo, y entonces se tiene $c'' = -(x' - z'')(y_{\prime\prime} - y') - (x_{\prime\prime} - x')(u'' - y')$, $d'' = -(x' - z'')(u_{\prime} - y') - (x' - z_{\prime})(y' - u'')$, mudando los signos a las ordenadas u'' o y': donde se ve que precisamente ha de resultar negativa alguna de las cantidades c'' o d'', según sea u'' mayor o menor que y'. Segundo, hallándose los trozos $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime}$ y M' en el lado izquierdo y M'' en el derecho, y en este caso, mudando sólo el signo de y', sale $d'' = -(x' - z'')(u_{\prime} + y') - (x' - z_{\prime})(u'' + y')$, esto es, negativa. Tercero y último, cuando el trozo $M_{\prime\prime}$ está en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho, con cuyo supuesto sale también negativa la cantidad $d'' = -(x' - z'')(u_{\prime} + y') - (x' - z_{\prime})(u'' - y')$.

La permutación $x_{\prime\prime}x_{\prime}z''z_{\prime}$ puede verificarse de otros tres modos diferentes, a saber:

1.º Estando los tres trozos M_u, M_ι y M' en el lado izquierdo, y M'' en el derecho, y en este caso es negativa la cantidad

$$d'' = -(x' - z'')(y_u - y') - (x' - z_\iota)(u'' + y').$$

2.º Estando los dos primeros trozos en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, con lo cual se tiene $c'' = -(x' - z'')(y_u + y') - (x'' - x')(y' - u'')$, $d'' = -(x' - z'')(u_\iota + y') - (x' - z_\iota)(u'' - y')$, esto es, una de ellas negativa precisamente, ya sea u'' mayor o ya menor que y'.

3.º Hallándose el trozo M_u en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho, y bajo este concepto sale

$$d'' = -(x' - z'')(y' - u_u) - (x' - z_\iota)(u'' - y') = -(z'' - z_\iota)(u_\iota - y') - (x' - z_\iota)(u'' - u_\iota),$$

con cuyas dos expresiones se ve que d'' resulta siempre negativa, tanto en el caso de ser y' mayor que u_ι como en el contrario.

La permutación $x'x_u z'' z_\iota$ puede reducirse a estos dos casos: o los trozos M_u, M_ι están en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, o bien el trozo M_u está solo en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho; y en cualquiera de estos supuestos se tiene $c'' = -(x' - z'')(y_u + y') - (x' - x_u)(u'' - y')$ que es una cantidad negativa.

La última permutación $x'x_u z_\iota z''$, que solamente puede verificarse hallándose los trozos M_u y M_ι en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, da $c'' = -(x' - z'')(y_u + y') - (x' - x_u)(u'' - y')$ que es evidentemente [64/65] una cantidad negativa como en la permutación anterior.

Tenemos demostrado desde el núm. 53 hasta aquí, que de las catorce relaciones diferentes de desigualdad que pueden existir entre las abscisas, diez hacen positivo el primer miembro de la condición (C) verificándose las propuestas (9), y las cuatro relaciones restantes corresponden a una situación de trozos en que el movimiento de rotación es imposible de efectuarse, puesto que con ellas salen precisamente negativos algunos de los coeficientes $a''b''c''$ y d'', véase lo que dijimos en el núm. 26: por consiguiente, podemos asegurar sin restricción ninguna que las condiciones (9) impiden que la bóveda tome el movimiento puro de rotación.

54. Últimamente, si además de las condiciones (8) y (9) tuviéramos estas otras

$$\left\{\begin{array}{l} M'' \cot(\alpha'' - f) - \dfrac{M'X'}{K + x'} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M''Z''}{z''} - M_{\prime\prime} \cot(\alpha_{\prime\prime} + f) \geq 0, \\[2ex] M'' \cot(\alpha'' - f) - \dfrac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{K + x_{\prime\prime}} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M_{\prime\prime} \cot(\alpha_{\prime\prime} + f) \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M'' \cot(\alpha'' + f) \geq 0, \\[2ex] M_{\prime\prime} \cot(\alpha_{\prime\prime} - f) - \dfrac{M'X'}{K + x'} \geq 0, \end{array}\right. \qquad (10)$$

nos fuera fácil demostrar que los primeros miembros de las condiciones generales (H), (I), (O), (P) y (Q) eran positivos: no lo hacemos por no ser más prolijos, y porque el camino trazado en las demostraciones hechas con respecto a las condiciones (A) y (C) nos pueden servir de guía para descubrir inmediatamente el que debe seguirse en el caso presente. Así que, dado por demostrado lo dicho; en vista de lo expuesto en los números 52 y 53, y observando que los tres grupos de condiciones (8), (9) y (10) pueden reducirse sustancialmente a las cinco siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} M_{\prime} \cot(\alpha_{\prime} - f) - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0, \\[2ex] M_{\prime} \cot(\alpha_{\prime} - f) - \dfrac{M'X'}{K + x'} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{K - z_{\prime}} - \dfrac{M'X'}{K + x'} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - \dfrac{M'X'}{x'} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M' \cot(\alpha' + f) \geq 0, \end{array}\right. \qquad (R)$$

con tal que se pongan por $M_\iota \cot(\alpha_\iota - f)$, $M'Z_\iota/(K + z_\iota)$ y $M_\iota Z_\iota/z_\iota$ los menores de los dos [65/66] mínimos, y por $M'\cot(\alpha' + f)$, $M'X'/(K + x')$ y $M'X'/x'$ los mayores de los dos máximos, que cada una de estas seis expresiones tiene según se refiera al lado derecho de la clave o al lado izquierdo, sin parar ya la atención en la diferencia que admitimos al principio de la obra entre los acentos superior e inferior de las letras; concluiremos por fin que satisfechas estas cinco condiciones de la manera expresada, quedan imposibilitados los arcos de adquirir cualquiera especie de movimiento.

55. Aquí vemos que las condiciones (R) se reducen a las mismas que hallamos con todo rigor para el caso de ser el arco simétrico, y esta coincidencia prueba que dichas condiciones reúnen a una forma sencilla y de fácil discusión, la circunstancia apreciable de apartarse lo menos posible de las primitivas que da directamente la consideración del movimiento.

También por medio de las mismas condiciones (R) estamos ya en disposición de averiguar fácilmente el mayor peso que puede pasar por el extradós de un arco, sin que éste se venga abajo: problema que, a pesar de suponer simétrica la bóveda, no podría resolverse antes de la simplificación admitida sino empleando las condiciones (A), (C), (H), (I), (O), (P) y (Q) con toda su generalidad. Esta investigación se reduce a sustituir primero en los términos $M'\cot(\alpha' + f)$, $M'X'/(K + x')$ y $M'X'/x'$ por M' y $M'X'$ respectivamente las cantidades $M' + P$ y $M' X' + P y'$, dando a entender por P el peso en cuestión, y considerando el mayor momento que puede tener éste: a igualar, después de hecha la sustitución anterior, a cero los primeros miembros; y despejando la incógnita P de las ecuaciones resultantes, a tomar finalmente por valor de P el menor de los mínimos de los segundos miembros. No nos detenemos en hacer aplicación de esta doctrina a ningún ejemplo, porque la discusión no presenta dificultad alguna, ni observaciones nuevas que merezcan atención. [66/67]

Capítulo cuarto

Aplicación de la doctrina expuesta en los capítulos anteriores a la determinación del grueso de machones

56. Habiendo tratado en los capítulos precedentes de las condiciones necesarias para sofocar los mutuos esfuerzos que se hacen las dovelas, nos toca en éste, a fin de completar nuestra teórica, determinar los gruesos que deben tener los machones para poder resistir al empuje total del arco. Con objeto de desembarazarnos de algunas complicaciones de cálculo, consideraremos solamente las bóvedas simétricas; y en este concepto no nos corresponde discutir aquí más movimientos que los concebidos en las fórmulas (B), (F) y (M); y aun de estos tres descartaremos el puro de traslación que rarísima vez tiene lugar a causa del rozamiento.

57. Cuantos Autores han tratado de dar fórmulas para determinar el grueso de estribos, otros tantos desenvuelven sus cálculos valiéndose de dos supuestos tan falsos como perjudiciales a la solidez de las bóvedas. Primeramente consideran cada pie derecho formado de un solo trozo de piedra, y de consiguiente capaz de oponer al tiempo de volcarse una resistencia mayor de la que tiene realmente.

En segundo lugar, suponen que todas las dovelas rematan en el extradós, lo que no sucede así generalmente, pues cuando éste se halla formado de una línea recta horizontal, que es el caso más común, entonces las dovelas son al poco más o menos iguales a la clave, y el extradós resulta de llenar de mampostería el interior, y de sillería el exterior de los riñones del arco, esto es, el espacio que queda

entre las cabezas de las dovelas y la línea horizontal que forma el extradós. Aunque el último supuesto no ocasiona errores de tanta trascendencia como el primero, no por eso lo admitiremos en nuestras discusiones; y bajo este sentido empezaremos ya a tratar [67/68] de ver cómo se puede determinar la verdadera resistencia que oponen los machones y el empuje que contra ellos produce el arco en cada uno de los movimientos a que se refieren las condiciones (F) y (M), advirtiendo antes de todo que partimos de un principio que nos va a servir de guía en los raciocinios que emplearemos en adelante.

Se reduce a suponer todos los sillares de un mismo tamaño, y situados de forma que sus juntas verticales de lecho correspondan al medio de las horizontales de los sillares inferior y superior más inmediatos: pues en efecto, esto es lo que en buena construcción se trata de satisfacer en cuanto lo permiten los materiales.

58. Empezando, pues, por la condición (F), correspondiente al movimiento puro de rotación, lo primero que vamos a hallar es la forma de la expresión representada por la letra M', bajo una junta de lecho conocida, y suponiendo que el extradós es una recta horizontal. Con esta mira considérese que el arco *AM*, Figura (21), haciendo bajar su vértice, adquiere un pequeño movimiento de rotación alrededor del punto *M*; y es evidente que todos los sillares que arrastren consigo las dovelas contenidas en el arco *AM*, deberán entrar a formar juntamente con éstas la expresión de M' y de su momento $M'X'$. Que *Mm*1.2.3.4.5.6.*n* sea la grieta aparecida de resultas del movimiento, dando a conocer por el lado derecho los sillares que permanecen unidos a la parte inmóvil de la bóveda, y por el izquierdo los que acompañan al arco *AM* en su movimiento, no admite la menor duda si se advierte que de este modo ninguno de los sillares 2.9, 4.8, 6.7 más contiguos a la grieta se halla en aptitud de desplomarse y salir de su asiento, a causa de pasar justamente el centro común de gravedad de cada uno de estos sillares y de los que podría llevar consigo, por el mismo punto que debiera servirles de apoyo en caso de rodar; y dicha circunstancia deja de verificarse con cualquiera otra figura y dirección que tenga la rotura. [68/69]

Una vez marcados los sillares que entran a determinar la superficie que representa la letra M', y por lo tanto la expresión de $M'X' \,/\, (K + x')$ segundo término de la condición; es fácil conocer que el valor de $M''Z'' \,/\, (K + z'')$, primer término de la misma, tiene que ser igual al momento, tomado en el punto *F,* de la superfi-

cie *ACEFGB* menos el de $Ee.s.e'.2.e.3.e'.4.e.5.e'E$, dividido todo por la altura *FG* que en este problema es el valor de $K + z''$: porque es bien patente que los sillares contenidos en la última superficie que se resta se hallan incapaces de acompañar a los demás que componen el machón en el movimiento de rotación que alrededor del punto *F* trata de comunicar a los estribos el empuje del arco *AMnB*, y por lo mismo no pueden entrar en el cálculo para medir la resistencia que los machones oponen a otro empuje.

59. Suponiendo, ahora, que tanto las dimensiones de las dovelas como las de los sillares son infinitamente pequeñas en comparación de la magnitud del arco, se podrá poner sin error sustancial por M' la superficie *AMNBA* (Fig. 22) y por M'' el espacio *ACeFGBA*; *MN* y *Fe* siendo dos rectas que formen con la vertical el ángulo $mMN = EeF$, cuya tangente sea igual a la mitad de la longitud o base de un sillar, dividida por la altura de éste: la primera línea tirada desde el punto *M* del intradós hasta encontrar el extradós, y la segunda desde el punto *F* de rotación del machón hasta tocar con su lado vertical *EC* interior. Con esto es fácil ver que cuanto menor se haga la relación entre la longitud y altura de los sillares, tanto menor será la resistencia que opongan los machones, y mayor el empuje del arco *AMNBA*: porque el triangulo *EFe* y el momento de la superficie *AMNBA*, tomado en el punto *M*, aumentan al paso que las líneas *MN* y *FE* se acercan más a la vertical. La relación entre la longitud y altura de los sillares puede crecer sin límites hasta el infinito, y en este caso los machones obrarán del mismo modo que si estuvieran formados de un solo [69/70] trozo de piedra; pero el límite de los decrementos de dicha relación no puede ser nulo, sino igual por lo menos a la unidad. La razón de esto último es bien clara, porque los sillares, cualesquiera que sean sus dimensiones, han de ser precisamente rectangulares o cuadrados: si lo primero, con ordenarlos de suerte que el lado mayor sirva de asiento y el menor de altura, como así se hace en efecto cuando se siguen las reglas de buena construcción, tendremos la relación de estas cantidades mayor que 1: y si sucede lo segundo, esta relación será constantemente igual a la unidad, sea el que fuere el lado elegido para servir de base o de altura. Como la mayor parte de obras se suelen construir de mampostería que admite piedras de diferentes dimensiones, sin guardar en su colocación tanto orden ni simetría como la sillería, con la que sólo se revisten, cuando mas, las partes exteriores y visibles; será lo más pruden-

te caminar en estas investigaciones bajo el supuesto menos favorable a la resistencia de los estribos, esto es, suponer que las líneas *MN* y *Fe* forman con la vertical el ángulo cuya tangente = $^1/_2$ del radio: lo que viene a ser lo mismo que hacer cuadradas las caras de los sillares, o de las piedras que componen la mampostería.

60. Pero considerando, según el convenio acabado de hacer, que el triangulo *FeE,* (Fig. 22), cuyo momento ha de restarse de el de toda la superficie *ACEFGB* para igualar la resta a $M''Z''$, tiene por altura el duplo de la base *EF* del machón, la condición

$$\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'}\geq 0$$

sólo puede servir para determinar esta base, cuando no haya necesidad de hacer el grueso *EF* mayor que 1/2 *CE*. En efecto, siempre que para resistir el empuje del arco, sea preciso dar a la base *EF* un valor mayor que 1/2 *CE*, el machón no puede en este caso obrar exactamente de la manera considerada en el número anterior: porque la línea *Fe*, tirada desde el punto *F*, y que separa la parte muerta del machón de la que se opone el empuje del arco, no cortará ya a la línea *CE* entre los puntos *C* y *E* que señalan los límites del pie derecho, sino solamente a su prolongación que para el asunto es una línea imaginaria. [70/71]

Así es que si la bóveda, siendo *EF* mayor que 1/2 *CE*, se halla con fuerza suficiente para hacer volcar al machón, éste debe ya abrirse y moverse de uno de los dos modos que vamos a exponer, diversos del que conviene al caso de ser *EF* menor que 1/2 *CE*.

61. El rozamiento que padecen las juntas verticales de los sillares que descansan inmediatamente sobre la línea *CD* (Fig. 23), producido por el empuje horizontal del arco *AMNBA*, puede ser mayor o menor que la fuerza de gravedad que los solicita para descender: si se verifica lo primero, permaneciendo inmóvil la superficie *CHFE* que queda a la izquierda de la línea *FH* tirada desde *F* hasta encontrar la horizontal *CD* que pasa por el arranque, y de forma que se tenga *DF* = 2x *DH*; la parte restante *MCHFGNM* tomará el movimiento de rotación, apoyada en el punto *F*, como si realmente fuera compuesta de un solo trozo de piedra,

porque aunque los sillares superiores a la hilada *CD* se hallen sin base durante el movimiento dicho, también es cierto que no pueden ser impelidos a bajar resbalando por sus juntas verticales de lecho sin ir contra el supuesto admitido. Si se verifica lo segundo, debe suponerse, además del movimiento considerado en la superficie *MCHFGNM*, que los sillares incluidos en el espacio *MCHfNM* bajan verticalmente resbalando sin abandonar la base fija *CH*, a medida que el movimiento de rotación producido alrededor del punto *F* intenta separarlos de ellas: *fF* siendo prolongación de la *HF* hasta encontrar el extradós, si antes no corta a la *MN*, pues en caso de cortar a esta antes que al extradós, bien se deja conocer la figura que tendría la superficie *MCHfNM*. La primera hipótesis se considera sustituyendo desde luego en la condición propuesta por $M''Z''$ el momento de *BGFHCAB* tomado en el punto *F*, y por $M'X'$ lo que ya se ha manifestado en el núm. 58, pero esta hipótesis no puede verificarse sino en arcos mucho más rebajados que los que se usan comúnmente en la práctica; por cuya razón no hablaremos más de ella. Queda, pues, la segunda hipótesis por única aplicable; y como viene acompañada de otros movimientos diversos del que se llevó en cuenta al tratar de la fórmula correspondiente al puro de rotación, nos es preciso para su completa consideración resolver antes [71/72] la cuestión siguiente.

62. Sean $A'D'B'C'$ y $A''D''B''C''eB'D'A''$ dos superficies (fig.24) que teniendo los puntos comunes de contacto representados por líneas alternativamente horizontales y verticales en forma de escalones, se hallen sostenidas a distintas alturas, y solicitadas por una fuerza aplicada al punto *M*, cuyo objeto es hacer girar a la superficie $A''B''$ alrededor del punto B''; y supongamos que de resultas de este movimiento la primera superficie $A'B'$ gira por el punto B' resbalando además a lo largo del suelo *de* y sostenida en dicho punto B', a fin de que los lechos verticales de ambas superficies permanezcan sin abrirse, y sólo varíen de puntos de aplicación. Llamemos *P* la fuerza referida; P' y P'' sus componentes horizontal y vertical; R' y R'' las superficies $A'D'B'C'$ y $A''D''B''C''D'A''$; r' y r'' las distancias de los puntos B' y B'' a las verticales que pasan respectivamente por los centros de inercia de dichas superficies; y hágase además, $MC' = h'$; $B''f = h''$; $B'C' = v'$; $B''C'' = v''$. En el punto *a* en que la dirección de *P* corta a la vertical que pasa por el centro de gravedad de la superficie $A'B'$, unamos el peso de esta superficie a la fuerza *P*, y producirán la resultante *aQ* que descompondre-

mos en las dos *OR* y *OS*, desde un punto *O* de su dirección tal, que la primera componente forme con el horizonte el ángulo λ, la segunda el ángulo λ' con la vertical y pase además por el punto B'. De este modo tendremos

$$OR = \frac{P' - (R' + P'') \text{ tang } \lambda'}{\{1 - \text{tang } \lambda \cdot \text{tang } \lambda'\} \cos \lambda}, \; OS = \frac{R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda}{\{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'\} \cos \lambda'};$$

no debiendo considerar de estas dos fuerzas más que la primera, pues la *OS* queda destruida con el hecho de hacerla pasar por el punto B'. El momento de *OR*, con respecto al punto $B,''$ = *Mom OQ* + *Mom OS*; el brazo de palanca de $OS = v'' \cos\lambda' - h'' \text{ sen}\lambda'$; el momento de

$$OQ = Mom\ aP - Mom\ R' = P'(h' + h'') - P''(v' + v'') - R'(r' + v'');$$

luego

$$Mom\ OR = P'(h' + h'') - P''(v' + v'') - R'(r' + v'') +$$
$$+ \left\{ \frac{v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'} \right\} (R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda);$$

cantidad que restada de $R''r''$, momento de la superficie $A''B''$, da la condición

$$R''r'' + R'(r' + v'') + P''(v' + v'') - P'(h' + h'') -$$
$$- \left\{ \frac{v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'} \right\} (R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda) \geq 0, \qquad (1)$$

para expresar que no tiene lugar el movimiento en cuestión.

Basta ahora averiguar los valores de las cantidades λ y λ' que aparecen indeterminadas. El objeto [72/73] mismo del problema nos indica que debemos darles aquellos valores que conviertan en un máximo a la expresión

$$\left\{ \frac{v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'} \right\} (R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda),$$

y la naturaleza del rozamiento nos obliga a hacerlas mayores que los ángulos correspondientes a la fricción que sufren el punto B' en la base *de*, y las juntas verticales comunes a las superficies $A'B'$ y $A''B''$, para que el movimiento pueda verificarse tal como se ha propuesto en caso de ser negativo el primer miembro de la condición (1). Por otra parte, los ángulos λ y λ' tienen que ser respectivamente menores que los formados por la resultante OQ con los planos horizontal y vertical, a fin de que la descomposición pueda efectuarse a la manera indicada, sin que ninguna de las componentes aparezca con signo negativo, el cual no tiene aquí lugar. Llamando, pues, f el ángulo del rozamiento que existe en las juntas verticales comunes a las superficies R' y R'', y haciendo nulo el de la base *de*, tanto para mayor sencillez de la cuestión, como porque debe realmente aparecer casi nulo a causa de ser engendrado por un movimiento mixto que siempre debilita considerablemente su efecto; se tendrá en virtud de todas estas consideraciones $\text{tang}\ \lambda > \text{tang} f$, $\text{tang}\ \lambda' > 0$, $\text{tang}\ \lambda < (R' + P'')/P'$; $\text{tang}\ \lambda' < P'/(R' + P'')$. Si observamos que en la expresión

$$\left\{\frac{v'' - h''\ \text{tang}\ \lambda'}{1 - \text{tang}\ \lambda\ \text{tang}\ \lambda'}\right\}(R' + P'' - P'\ \text{tang}\ \lambda),$$

diferenciada con respecto a una de las indeterminadas λ y λ', e igualada después a cero, no queda término ninguno función de la cantidad que ha hecho de variable, y que por lo tanto es imposible determinar su valor por medio de la ecuación resultante; inferimos de aquí que la expresión

$$\left\{\frac{v'' - h''\ \text{tang}\ \lambda'}{1 - \text{tang}\ \lambda\ \text{tang}\ \lambda'}\right\}(R' + P'' - P'\ \text{tang}\ \lambda)$$

no tiene máximo teórico con respecto a las variables λ y λ', y que crece sin interrupción al paso que éstas aumentan o disminuyen. Luego tomando por valor de las cantidades λ y λ' sus límites, esto es, los segundos miembros de las cuatro condiciones acabadas de poner, estas sustituciones producirán en la expresión

$$\left\{\frac{v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'}\right\}(R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda)$$

otros tantos valores, uno de los cuales será el mayor que puede dar esta cantidad. De las cuatro condiciones arriba dichas sacamos:

1.º tang λ = tang f, y tang $\lambda' = 0$:
2.º tang λ = tang f, y tang $\lambda' = P' / (R' + P'')$:
3.º tang $\lambda = (R' + P'') / P'$, y tang $\lambda' = 0$:
4.º tang λ = [73/74] $(R' + P'') / P'$, y tang $\lambda' = P' / (R' + P'')$;

y estos cuatro valores transforman a

$$\left\{\frac{v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'}\right\}(R' + P'' - P' \text{ tang } \lambda)$$

en $v''(R' + P'') - v''P'$ tang f; $v''(R' + P'') - h''P'$, 0, y $v''(R' + P'') - h''P'$: así, pues, despreciando el tercero por nulo, y el cuarto por ser equivalente al segundo, tendremos sustituidos los dos restantes en la condición (1), la primera o última de estas

$$R''r'' + R'(r' + v'') + P''(v' + v'') - P'(h' + h'') - v''(R' + P'') + h''P' \geq 0,$$

$$R''r'' + R'(r' + v'') + P''(v' + v'') - P'(h' + h'') - v''(R' + P'') + v''P' \text{ tang } f \geq 0,$$

según fuere $v''(R' + P'') - h''P'$ mayor o menor que $v''(R' + P'') - v''P'$ tang f, quiero decir, se usará de la primera condición si $h'' < v''$ tang f, y de la segunda en el caso contrario: pues de este modo se elige la condición más difícil de verificarse. Estas dos condiciones, borrando los términos iguales y de signo contrario, pueden ponerse bajo la forma

$$R''r'' + R'r' + P''v' - P'h' \geq 0, \tag{2}$$

$$R''r'' + R'r' + P''v' - P'(h' + h'' - v'' \text{ tang } f) \geq 0 \tag{3}$$

Es preciso advertir, para no exponernos a hacer un mal uso de estas fórmulas, que si el rozamiento es mayor que $(R' + P'') / P'$ no puede entonces efectuarse la descomposición de la fuerza aQ, de forma que satisfaga a las condiciones tang $\lambda >$ tang f, y tang $\lambda < (R' + P'') / P'$, pues estas son incompatibles bajo el supuesto de ser tang $f > (R' + P'') / P'$, o bien P' tang $f > R' + P''$. Por cuya razón, para resolver el problema en casos semejantes, debe emplearse otro proceder diferente del que hemos seguido: esto es, se formara inmediatamente el momento de aQ con respecto al punto B'', que es $= P'(h' + h'') - P''(v' + v'') - R'(x' + v'')$, y se restará de $R''r''$, de la misma suerte que si las dos superficies $A'B'$ y $A''B''$ formaran un solo cuerpo, porque en efecto el ser tang $f > (R' + P'') / P'$ indica que deben continuar unidas y sin resbalar por las juntas de lecho comunes a las dos. Por esta causa dijimos en el núm. 61 que la solución del caso referido se hallaba contenida inmediatamente en la fórmula $M''Z'' / (K + z'') - M'X' / (k + x') \geq 0$ correspondiente al movimiento puro de rotación. Aquí vemos más palpablemente que en las demás cuestiones, como la simple [74/75] supresión de las condiciones nacidas de la naturaleza del rozamiento y del problema, nos proporciona no sólo la fórmula conveniente, sino también los límites hasta donde deben extenderse sus aplicaciones; y esta falta de continuidad que se nota en la solución de un mismo problema, da a la fricción el carácter propio que pertenece a las fuerzas puramente pasivas de manifestarse en el cálculo, si se tratase aquélla como una verdadera fuerza activa.

63. Si entre medias de las superficies $A'B'$ y $A''B''$ concebimos un espacio $B'D'hfH$ que los separe (Fig. 25), formado por columnas oblicuas e infinitamente delgadas, y cuyos puntos de contacto, o sean juntas de lecho tengan exactamente la misma figura que las de las superficies $A'B'$ y $A''B''$; veamos en este caso la alteración que padecen las fórmulas anteriores, teniendo en consideración la resistencia producida por dicho intermedio contra la fuerza OR que es la sola componente de aQ que debe tenerse presente según lo dicho en el problema pasado, y suponiendo que cada columna adquiere dos movimientos, por ejemplo la $tss't$, el uno de rotación alrededor del punto extremo t' de su base, y el otro de traslación a lo largo del suelo que la sostiene en dirección de t' hacia H, y apoyada en el mismo punto t' de suerte que los lechos verticales de todas resbalen unos sobre otros sin abrirse. Llamemos V lo que viene a ser la fuerza OR, después de haber padecido la resistencia de las columnas contenidas en una base

$B't = t$ cualquiera, T la área $B'tshD'$ que componen estas columnas, y d la distancia $B'H$ que separa las dos superficies primitivas $A'B'$ y $A''B''$, conservando todas las demás denominaciones de la cuestión anterior. Es claro que tanto T como V serán funciones de t; y de consiguiente el momento de la fuerza V, al pasar t a ser $t + dt$, se habrá convertido en $Mom\ V + dMom\ V$, siendo $stt's'$ la columna infinitamente pequeña que hace producir con su peso esta alteración, y $tt' = dt$ su base. La fuerza V que debe siempre conservarse con una dirección constante e igual a la que tiene OR, quiero decir, formando con el horizonte el ángulo λ, al encontrar la vertical que pasa por el centro de inercia de la columna $stt's' = dT$, se une con el peso dT de esta columna, y las dos fuerzas V y dT producen una resultante que descompondremos, desde [75/76] el punto en que su dirección encuentra a la vertical que pasa por t', en otras dos de forma que siendo la una paralela a V, pase la otra por el punto t' y sea de consiguiente perpendicular a $B'H$. Esta última componente sale $= dT$, y se equilibra con la resistencia de la base $B'H$, tanto con respecto al movimiento de traslación por ser perpendicular a $B'H$, y haberse supuesto nulo el rozamiento en dicha base, como con respecto al movimiento de rotación a causa de pasar su dirección por el mismo punto t' de apoyo de la co-lumna $sts't'$. La primera componente, la única que debe producir efecto contra el espacio $t's'fH$ y la superficie $A''D''B''C''$ que quedan, resulta $= V$, y su momento con relación al punto B'', $= Mom\ V - Mom\ dT + (d + v'' - t)\ dT$, expresando por $Mom\ V$ el momento que tiene la fuerza V antes de unirse con el peso dT. Si pasamos $Mom\ V$ al primer miembro de la ecuación, este miembro podrá expresarse por $dMom\ V$, y tendremos $dMom\ V = -Mom\ dT + (d + v'' - t)\ dT = -dMom\ T + (d + v'' - t)\ dT$, e integrando

$$Mom\ V = \text{constante} - Mom\ T + \int (d + v'' - t) dT.$$

Por el problema del número 62 se saca, notando que aquí es $d + v''$ lo que allá era v'',

$$Mom\ V = P'(h' + h'') - P''(d + v' + v'') - R'(d + r' + v'') +$$

$$+ \left\{ \frac{d + v'' - h'' \text{ tang } \lambda'}{1 - \text{tang } \lambda \text{ tang } \lambda'} \right\} (R' + P'' - P' \text{ tang} \cdot \lambda),$$

cuando $t = 0$ y $T = 0$, pues en este caso el momento de V es el mismo que el de OR: con que la integral completa anterior será

$$Mom\ V = P'(h' + h'') - P''(d + v' + v'') - R'(d + r' + v'') +$$

$$+\left\{\frac{d + v'' - h''\ \text{tang}\ \lambda'}{1 - \text{tang}\ \lambda \cdot \text{tang}\ \lambda'}\right\}(R' + P'' - P'\ \text{tang}\ \lambda) - Mom\ T + \int (d + v'' - t)dT,$$

haciendo que $\int(d + v'' - t)\ dT$ empiece desde $t = 0$, y tome todo su valor cuando $t = B'H$. Conocido ya el valor de $Mom\ V$ se restara de $R''r''$, momento de la superficie $A''B''$, y sustituyendo por

$$\left\{\frac{d + v'' - h''\ \text{tang}\ \lambda'}{1 - \text{tang}\ \lambda \cdot \text{tang}\ \lambda'}\right\}(R' + P'' - P'\ \text{tang}\ \lambda)$$

los dos valores hallados en el núm. 62, que aquí se convierten en

$$(R' + P'')(d + v'') - P'h'', \text{ y } (R' + P'')(d + v'') - P'(d + v'')\ \text{tang}\, f,$$

se tendrán finalmente las condiciones

$$R''r'' + R'r' + P''v' - P'h' + Mom\ T - \int (d + v'' - t)dT \geq 0, \qquad (4)$$

$$R''r'' + R'r' + P''v' - P'(h' + h'' - d\ \text{tang}\, f - v''\ \text{tang}\, f) + Mom\ T - \int(d + v'' - t)dT \geq 0. \quad (5)$$

[76/77]

64. Para aplicar estas fórmulas al caso que dejamos pendiente en el núm. 61, y expresado en la Fig. 23, hemos de advertir que en esta figura, las superficies *MCOM*, *FGfF* y *CHfNOC* ocupan con respecto al empuje del arco *AMNBA* el mismo lugar, y ejercen las mismas funciones que en la Fig. 25 las superficies $A'B'$, $A''B''$ y $B'D'hfH$ con relación a la fuerza P supuesta aplicada en el punto M. Así que, llamando m la montea AL del arco (Fig. 23), l su semiluz LC, h la altura CE del machón, y su grueso $CD = EF = v$, tendremos para las fórmulas (4) y (5), $h' = m - x'$, $h'' = h$, $v' = l - y'$, $d = v - 1/2h$, $v'' = 1/2h$: y continuando en representar por R', R'', T las superficies *MCOM*, *FGfF*, *CHfNOC*; por r', r'', las distancias

de las verticales que pasan respectivamente por los centros de gravedad de las dos primeras superficies, a los puntos C y F, quedarán dichas fórmulas transformadas en

$$R''r'' + R'r' + P''(l - y') - P'(m - x') + Mom\ T - \int (v - t)dT \geq 0,$$

$$R''r'' + R'r' + P''(l - y') - P'(h + m - x' - v \operatorname{tang} f) + Mom\ T - \int (v - t)dT \geq 0.$$

Hemos dicho, (véase el núm. 62) que P' y P'' son las componentes horizontal y vertical de la fuerza que solicita al sistema en las Figs. 24 y 25: luego aquí será $P' = M'X' / (K + x')$; $P'' = M'$, puesto que $M'X' / (K + x')$ y M' son las componentes horizontal y vertical del empuje que hace contra los machones el arco $AMNB = M'$. Sustituidos estos valores en las condiciones últimas, y llamando $M''Z'' = R''r'' + R'r' + R'v + Mom\ T + P''(v + l - y') + P'(K + x')$ el momento de toda la superficie $AMCHFGBA$, tomado en el punto F, hallaremos

$$M''Z'' - P'(K + m) - (R' + P'')v - \int (v - t)dT \geq 0, \qquad (6)$$

$$M''Z'' - P'(K + m + h) - (R' + P'' - P' \operatorname{tang} f)v - \int (v - t)dT \geq 0. \qquad (7)$$

65. Las condiciones (6) y (7) están sacadas con todo rigor y exactitud, a fin de que pueda aplicarlas [77/78] sin restricción alguna aquél a quien no le arredren complicaciones; pero nosotros, en el concepto de que a la práctica no le interesa tanto la exactitud escrupulosa, cuando trae consigo largos y penosos cálculos, como el que las fórmulas se presenten fáciles y sencillas en su discusión, siempre que los supuestos admitidos para reducirlas a este estado redunden en favor de la solidez; hemos por último convenido, para simplificarlas algún tanto, en hacer las suposiciones siguientes que tienen el requisito mencionado, y pueden muy bien admitirse por no separarse mucho de la verdad. Primero, suponemos, cualquiera que sea el arco AM, que se confunde con otro parabólico de igual abscisa y ordenada que él. Segundo, despreciamos en el valor del trozo M', que por lo dicho en el núm. 59 es igual a la superficie $AMNB$, y de consiguiente también en el valor de su momento, el triangulo MmN; siendo la Mm una recta vertical tirada desde el punto M que determina la magnitud del arco AM, hasta encontrar el extradós.

Tercero, la cantidad que expresa la letra R', es la superficie *MCOM* incluida entre el arco *MC*, la junta *MN* de rotura y la *CO* paralela a *Ff*: esta línea, por el supuesto admitido en el núm. 59, forma con la vertical el ángulo *GFf* = 26º 34′; pues tangente de *GFf* = 1/2; y así, para que la *CO* no atraviese el arco *MC*, y la cantidad R' no represente una figura quimérica, dicha línea *CO* deberá tirarse desde el punto *C* de arranque, cuando la tangente del arco en este punto forme con la vertical un ángulo mayor que 26º 34′; pero no verificándose esta circunstancia se tomará en el arco *MC* un punto cuya tangente sea paralela a *Ff*, y su prolongación hasta encontrar la *MN* terminará el perímetro de la superficie representada por R': y finalmente no pudiendo caer dicha tangente entre los puntos *M* y *C* sino más arriba del primero, en este último caso será nula la superficie en cuestión. Como en la mayor parte de bóvedas escarzanas, la posición de la junta *MN* que [78/79] produce el mayor empuje, se confunde con el arranque *C*, por lo que debe tenerse $R' = 0$; y en las semielípticas viene a estar dicha junta situada de forma que hace con la vertical un ángulo de 60 grados, al poco más o menos, circunstancia que influye para que la cantidad R' sea muy pequeña; determinamos en virtud de estas consideraciones hacer $R'=0$ para todos los casos y así simplificamos muchísimo las fórmulas, sin apartarnos sensiblemente de la verdad. Cuarto, caminando en el supuesto de ser $R'=0$ y para tener una expresión cómoda de $\int(v-t)\,dT$, en cuya integral debe dT expresar los elementos de la superficie *CHfNOC* paralelos entre sí y a la línea *Ff*; sustituiremos por dicha superficie el paralelogramo *HhcC* que resulta de tirar la horizontal *Mh* por el punto *M* hasta encontrar con los lados *CO* y *Hf*: con esto; la integral completa de

$$\int(v-t)\,dT=\int(v-t)(m-x')dt=(m-x')\int(v-t)\,dt=\tfrac{1}{2}(m-x')(2vt-t^2)=\tfrac{1}{2}(m-x')(v^2-\tfrac{1}{4}h^2),$$

haciendo $t = CH = v - 1/2h$, que es el mayor valor de t. Quinto, por lo dicho en el supuesto tercero de que la junta de rotura *MN* se confunde con el arranque en los arcos escarzanos, y en los de medio punto y semielípticas está situada a los 60 grados, se deduce que el espacio *Mmnc* es cero en los primeros y muy pequeño en los segundos; y en atención a esto despreciaremos dicho espacio al estimar analíticamente el momento de la superficie *AMCHFGBA* que fue expresado por $M''Z''$. Con arreglo a las simplificaciones que hemos manifestado, se tendrá pues

$$M''Z'' = \frac{1}{2}\, v^2(K + m) + P''v + P''(l - y') + P'(K + x) + \frac{1}{24}\, h^3,$$

$$P'' = M' = Ky + \frac{1}{3}\, xy,\ P' = \frac{M'X'}{K + x'} = \frac{y^2(6K + x)}{12(K + x)},\ R' = 0,$$

$$\int (v - t)dT = \frac{1}{2}\,(m - x)\left(v^2 - \frac{1}{4}\, h^2\right);$$

y sustituidos estos valores en las fórmulas (6) y (7), cuidando de poner para mayor comodidad por

$$Ky + \frac{1}{3}\, x\, y\ \ ,\ \ \frac{y^2(6K + x)}{12(K + x)}$$

las letras P'' y P', nos resultará

$$v \geq \sqrt{\frac{2P'(m - x) - 2P''(l - y)}{K + x}}, \qquad \text{(S)}$$

$$\frac{1}{2}\, v^2(K{+}x) + vP' \text{ tang} f - P'(m - x) + P''(l - y) - P'h + \frac{1}{8}\, h^2(m - x) + \frac{1}{24}\, h^3 \geq 0. \qquad \text{(T)}$$

66. Es de notar que en la condición (S), que proviene de la (6), no se ponen los términos [79/80] 1/8 $(m - x)h^2$ + 1/24 h^3 que aparecen después de hechas las sustituciones anteriores, porque siendo positivos y funciones de h, variable que puede tener todos los valores imaginables desde cero hasta la altura total de los machones, a causa de estar estos formados por un número infinito de hiladas o capas horizontales, cuyos extremos exteriores son capaces de servir de otros tantos puntos de apoyo para girar el pie derecho; debemos dar a dicha variable h aquel valor que haga más dificultosa la existencia de la condición, y desde luego se ve que ninguno como $h = 0$ llena mejor el objeto. No sucede lo mismo en la condición (T) con los términos funciones de h, los que solamente pueden despreciarse en el caso de ser realmente nula la altura de los machones; pero en cambio

de esto hay un valor de h que reduce la expresión $-P'h + 1/8\, h^2 (m - x) + 1/24\, h^3$ a un mínimo , y es $h = -(m - x) + \sqrt{8P' + (m - x)^2}$: de suerte que no se sustituirá en la condición (T) por h otro valor que éste, siendo la altura total del machón mayor que $-(m - x) + \sqrt{8P' + (m - x)^2}$, y sólo en el caso contrario deberá ponerse dicha altura total por valor de h. Aquí empezamos ya a entrever la diferencia de resultados que pueden dar nuestras fórmulas comparadas con las conocidas hasta ahora: en estas últimas, como que sólo entran funciones lineales de h, el mayor grueso de machones corresponde siempre a su mayor altura; pero observando las muestras, se nota que en muchas bóvedas puede haber entre medias de la altura de los estribos, puntos más débiles y dispuestos a abrirse que la misma base de ellos, lo cual es lo mismo que acredita la experiencia, pues no siempre que se arruina un arco por falta del competente grueso en los pies derechos, giran éstos apoyados en los puntos más bajos o cercanos a la base.

67. Como en virtud de lo que llevamos expuesto desde el núm. 60, las fórmulas (S) y (T) son solamente aplicables al caso de ser $v > 1/2\, h$, nos falta poner a continuación de ellas la correspondiente al caso contrario, quiero decir, la discutida en el núm. 58. Sustituyendo, pues, en aquella condición por $M''Z''$ el momento de la superficie *AMCeFGBA* (Fig. 22), que es igual a

$$-2/3\, v^3 + 1/2\, v^2 (K + m + h) + P'(K + x) + P''v + P''(l - y),$$

según los supuestos admitidos en el [80/81] número 65, tendremos la fórmula siguiente

$$-\frac{2}{3} v^3 + \frac{1}{2} v^2 (K + m + h) + vP'' + P''(l - y) - P'(m - x) - P'h \geq 0, \qquad \text{(V)}$$

para determinar, como llevamos dicho, el valor de v cuando los machones no necesitan tener un grueso mayor que la mitad de su altura.

68. Desde luego se deja conocer que en la discusión de las fórmulas (S), (T) y (V) debe hallarse la posición de la junta MN que determina al mismo tiempo el valor de las coordenadas x é y del punto M, igualando a cero la diferencial del primer miembro de cada una ellas con respecto a la variable x y sus dependientes

y, P'' y P', esto es, haciendo que los referidos miembros sean unos mínimos para considerar de este modo el caso más desfavorable a la resistencia de los pies derechos. Aunque tal es el método que prescribe la cuestión, no lo seguiremos por la mucha complicación que acarrea en la mayor parte de casos, y en su lugar supondremos que la junta *MN* de rotura corresponde a un arco de 60 grados contados desde el vértice en las bóvedas de medio punto y semielípticas, porque hemos observado en efecto que próximamente es ésta la situación que sale para dicha junta por la doctrina de máximos y mínimos. Admitido este supuesto, se tendrá

$$x = m - \frac{m^2}{\sqrt{(3l^2 + m^2)}},\ y = \sqrt{\frac{3l^4}{3l^2 + m^2}};$$

y pasemos ya a aplicar las fórmulas referidas a ejemplos numéricos, en donde se percibirá mejor el camino que debe seguirse en cada uno de ellos.

69. Haciendo constantemente tang f = 1/2 en la condición (T), propongamos por primer ejemplo un arco de medio punto, cuya clave sea 1/10 de la semiluz. Tendremos desde luego $m = l$, $x = 1/2\ l$, $y = 1/2\ \sqrt{3}\ l = 0{,}8660\ l$, $P'' = yK + 1/3\ xy = 0{,}2309\ l^2$, $P' = MX/(K+x) = y^2\,(6K+x)/[12(K+x)] = 0{,}1145\ l^2$, y las fórmulas (S), (T) y (V) convertidas en

$$v \geq \sqrt{\frac{2P'(m-x) - 2P''(l-y)}{K+x}} = 0{,}30l \qquad (8)$$

$$0{,}3v^2l + 0{,}0577vl^2 - 0{,}0263l^3 - 0{,}1145hl^2 + \frac{1}{16}h^2l + \frac{1}{24}h^3 \geq 0 \qquad (9)$$

[81/82]

$$-\frac{2}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^2(h + 1{,}1l) + 0{,}2309vl^2 - 0{,}1145hl^2 - 0{,}0263l^3 \geq 0 \qquad (10)$$

Si el valor $v = 0{,}30\ l$, sacado de la primera de estas fórmulas, lo sustituimos en la segunda, y ordenamos los términos de ésta con respecto a las potencias de h, saldrá

$$\frac{1}{24}h^3 + \frac{1}{16}h^2 - 0{,}1145h + 0{,}0168 \geq 0,$$

que considerada como una ecuación, y tomando la raíz positiva y menor de las tres que tiene, da $h = 0{,}14\ l$: lo cual quiere decir, que desde esta altura en adelante empieza la condición (9) a dar a v un valor mayor que el deducido en la (8). Sustituyendo ahora en la misma condición (9) por h, el valor 0,58 l que convierte en un mínimo la cantidad $-0{,}1145\ h + 1/16\ h^2 + 1/24\ h^3$, y cuya expresión general es $h = -(m - x) + \sqrt{8\ P' + (m - x)^2}$, según se dijo en el núm. 66; y de la fórmula

$$0{,}3v^2 + 0{,}0577lv - 0{,}0636l^2 \geq 0,$$

que resulta con dicha sustitución, se saca $v = 0{,}38\ l$ que es el máximo grueso que la condición (9) puede dar. Finalmente, haciendo en la (10) $v = 0{,}38\ l$, y despejando h se tiene

$$h \leq \frac{0{,}1671l - 0{,}0632l}{0{,}1145 - 0{,}0722} = \frac{0{,}1039l}{0{,}0423} = 2{,}4l:$$

altura a la cual empieza a dar la condición (10) el mismo grueso que la condición (9) a la altura $h = 0{,}58\ l$, y de consiguiente deberá consultarse solamente la condición (10) en los casos de ser $h \geq 2{,}4\ l$. Resulta, pues, de todo este cálculo que el machón tendrá: el grueso $v = 0{,}30\ l$, cuando su altura esté entre $h = 0$ y $h = 0{,}14\ l$: el que saliere de la condición (9), poniendo por h su valor total, siempre que sea $h > 0{,}14\ l$ y $h < 0{,}58\ l$: el espesor $v = 0{,}38\ l$, estando la altura del machón contenida entre 0,58 l y 2,4 l: últimamente, el que salga de la condición (10), sustituyendo por h toda la altura de los estribos, cuando ésta sea mayor que 2,4 l; de forma que siendo h infinita sacaremos $v \geq \sqrt{0{,}2290\ l^2} = 0{,}47\ l$, y a este supuesto corresponde el mayor grueso de machones en la bóveda propuesta. [82/83]

70. Sea el segundo ejemplo una bóveda semielíptica rebajada que tenga por clave un décimo de la luz, y por montea 1/2 l: con esto será $x = m - m^2 / \sqrt{3\ l^2 + m^2} = 0{,}3614\ l$;

$$y = l\sqrt{[3\ l^2 / (3\ l^2 + m^2)]} = 0{,}967\ l;$$

$P'' = y\,K + 1/3\,xy = 0{,}2117\,l^2;\ P' = y^2\,(6K + x)/[12\,(K + x)] = 0{,}1602\,l^2,$

$$v \geq \sqrt{\frac{2P'(m-x) - 2P''(l-y)}{K+x}} = 0{,}25l, \qquad (11)$$

$$0{,}2307v^2l + 0{,}0801vl^2 - 0{,}0139l^3 - 0{,}1602l^2h + 0{,}0173lh^2 + \frac{1}{24}h^3 \geq 0, \quad (12)$$

$$-\frac{2}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^2(h + 0{,}4614l) + 0{,}2117l^2v - 0{,}0139l^3 - 0{,}1602l^2h \geq 0. \qquad (13)$$

Haciendo con estas condiciones el mismo cálculo seguido en el primer ejemplo, deduciremos de él que si la altura del machón no pasa de 0,12 l, bastará el grueso v = 0,25 l sacado de la condición (11); pero en caso de ser $h > 0{,}12\ l$; y $h < (m - x) + \sqrt{[8\,P' + (m-x)^2} = l$ con corta diferencia, nos valdremos de la condición (12) para determinar dicho grueso poniendo por h toda la altura; y en tercer lugar, se dará a los machones el grueso v = 0,56 l que sale de la condición (12) sustituyendo por h el valor $h = (m - x) + \sqrt{8\,P' + (m-x)^2} = l$ correspondiente al mínimo de $- P'h + 1/8\,(m - x)\,h^2\,l + 1/24\,h^3$, siempre que la altura sea igual o mayor que la semiluz. Aquí, al sustituir v = 0,56 l en la condición (13) para saber desde qué altura empieza esta condición a dar al machón un grueso mayor que la (12), encontraremos positivo su primer miembro, y de consiguiente negativo el valor de h si nos empeñamos en despejarlo: lo cual prueba que en caso ninguno puede tener lugar aquella circunstancia. Por eso decimos que desde $h = l$ hasta el infinito, debe darse al machón un espesor v = 0,56 l; y en esta bóveda se verifica ya lo anunciado en el núm. 66, a saber: que no siempre los estribos necesitan aumentar de grueso por aumentar de altura.

71. En los dos ejemplos pasados se hallan reunidas todas las particularidades y circunstancias dignas de notar que pueden ocurrir en la determinación del grueso de machones, cuando las bóvedas son elípticas o de medio punto: por lo tanto, es excusado poner más ejemplos numéricos de esta clase de arcos, y así pasaremos a hablar de los escarzanos. Si el ángulo formado [83/84] por los arranques del arco y la vertical es mayor que el de 60 grados, será necesario para

discutir las fórmulas poner por x e y las coordenadas correspondientes al punto del intradós, cuya normal, o junta de lecho forma el ángulo de 60 grados con la vertical, y cuyas expresiones son $x = (l^2 + m^2) / 4m$; $y = [(l^2 + m^2) / 4m] \sqrt{3}$, pues la curva intradós será parte de un círculo cuyo radio $= (l^2 + m^2) / 2m$: hecha esta sustitución, se seguirá en todo lo demás el mismo proceder que en los números 69 y 70. Si las juntas de arranque no llegan a formar con la vertical el ángulo de 60 grados, lo que en esta especie de bóvedas es lo más regular, se hará $x = m$, $y = l$; con cuya sustitución la fórmula (S) desaparece, y las dos (T) y (V) toman la forma

$$\frac{1}{2} v^2(K + m) + vP' \text{ tang} f - P'h + \frac{1}{24} h^3 \geq 0, \tag{U}$$

$$-\frac{2}{3} v^3 + \frac{1}{2} v^2(K + m + h) + vP'' - P'h \geq 0: \tag{X}$$

no olvidando que para estos casos es

$$P' = \frac{l^2(6K + m)}{12(K + m)}, \; P'' = lK + \frac{1}{3} lm.$$

Apliquemos estas condiciones a dos arcos escarzanos que sean el uno de 120 grados y el otro de 60, esto es, que los arranques del primero formen con la vertical 60 grados, y los arranques del segundo 30 grados: supongamos, además, que la clave es en ambos la décima parte de la semiluz como en los ejemplos anteriores.

72. En el primer caso tendremos $m = l$ tang 1/2 60º $= l$ tang 30º $= 0{,}5773\ l$, $P' = 0{,}1448\ l^2$, $P'' = 0{,}2924\ l^2$, y las condiciones (U) y (X) transformadas en

$$0{,}3386v^2l + 0{,}0724vl^2 - 0{,}1448l^2h + \frac{1}{24} h^3 \geq 0, \tag{14}$$

$$-\frac{2}{3} v^3 + v^2(0{,}3386l + 0{,}5l) + 0{,}2924l^2v - 0{,}1448l^2h \geq 0 \tag{15}$$

Sustituyendo en la primera $h = \sqrt{8\ P'} = 1{,}07\ l$, que es el valor correspondiente al mínimo de $-P'\ h + 1/24\ h^3 = -0{,}1448\ l^2\ h + 1/24\ h^3$, sale

$$0{,}3386v^2 + 0{,}0724vl - 0{,}1049l^2 \geq 0,$$

que da $v \geq 0{,}46\ l$: pongamos este valor en la condición (15), y despejando h se tiene

$$h \leq \frac{0{,}1133l}{0{,}1448 - 0{,}1058} = 2{,}9l:$$

así, pues, en la determinación del grueso de machones para la bóveda propuesta, se empleará [84/85] la fórmula (14) si $h \leq 1{,}07\ l$: desde esta altura hasta $2{,}9\ l$, se dará el grueso $v = 0{,}46\ l$: y siendo h mayor que $2{,}9\ l$ se usará de la fórmula (15). De consiguiente, en esta bóveda sucede lo mismo que en la de medio punto del núm. 69; a saber: que su mayor grueso corresponde a una altura infinita, y es $v = \sqrt{0{,}2896\ l\ l} = 0{,}53\ l$ contando solamente con los términos de la fórmula (15) que contienen h.

73. Para el segundo arco escarzano sale $m = l$ tang 1/2 30º $= l$ tang 15º $= 0{,}2679\ l$, $P'' = 0{,}1893\ l\ l$, $P' = 0{,}1966\ l\ l$,

$$0{,}1839v^2l + 0{,}0983vl^2 - 0{,}1966hl^2 + \frac{1}{24}h^3 \geq 0, \qquad (16)$$

$$-\frac{2}{3}v^3 + v^2(0{,}1839l + 0{,}5h) + 0{,}1893vl^2 - 0{,}1966h \geq 0. \qquad (17)$$

Haciendo $h = \sqrt{8\ P'} = 1{,}25\ l$, la condición (16) queda convertida en

$$0{,}1839v^2 + 0{,}0983lv - 0{,}1639l^2 \geq 0,$$

que da $v = 0{,}72\ l$; y porque este valor sustituido en la (17), hace positivo su primer miembro, se sigue que sólo en el caso de ser $h < 1{,}25\ l$, hay necesidad de

emplear la condición (16) para determinar v; y en los demás casos, en que h pasa de 1,25 l, bastará hacer $v = 0{,}72\ l$, aunque sea infinita la altura.

74. Es necesario advertir que el valor $v = 0{,}46\ l$ que aparece en el núm. 72, sacado de la fórmula (14) haciendo $h = 1{,}07\ l$, no conviene con lo que notamos en el núm. 60, pues la mitad de esta altura sale mayor que el grueso $v = 0{,}46\ l$, debiendo ser menor o a lo más igual. Esto manifiesta que el movimiento contenido en aquella fórmula es imposible de verificarse con todas sus circunstancias, refiriendo el punto de rotación a la altura $h = 1{,}07\ l$; pero conoceremos el verdadero límite del que no debe pasar h en la fórmula (14), sustituyendo en esta $2v$ por h, pues en efecto, todos los valores de h, que pasen de $2v$, dejarán de cumplir con la circunstancia referida en el núm. 60. Sustituyendo, pues, $h = 2v$ en la fórmula (14) e igualando a cero su primer miembro tendremos

$$\frac{1}{3}v^2 + 0{,}3386vl - 0{,}2172l^2 = 0,\ [85/86]$$

que da $v = 0{,}45\ l$, y por lo mismo $h = 0{,}90\ l$; y como se halla fuera de este límite la cantidad $h = 1{,}07\ l$, sacada en el núm. 72 para tener el máximo grueso de v, se sigue de aquí que este máximo no es aplicable a la bóveda propuesta, sino el valor correspondiente a la altura $h = 0{,}90\ l$, que es $v = 0{,}45\ l$. Éstas son en realidad las dos cantidades que debiéramos haber puesto en lugar de $h = 1{,}07\ l$ y $v = 0{,}46\ l$; pero hemos dejado de hacerlo así por lo poco que se diferencian entre sí los dos valores 0,45 l y 0,46 l, y también por no alterar el orden seguido en los otros ejemplos, que además de ser más uniforme y expedito, tiene la ventaja de proporcionar mayor solidez a la bóveda. Por otra parte son raros los casos en que el valor de v dado por las fórmulas (T) y (U), sale menor que la mitad de la altura, cuando ésta se hace igual a $-(m - x) + \sqrt{8P' + (m - x)^2}$, esto es, a la expresión de h que produce un máximo en v.

75. Siendo tales, cual hemos visto, las fórmulas necesarias para determinar con rigor y fundamento el grueso de los machones, ya nos hallamos en estado de poder hacer ver palpablemente la grande diferencia que hay de suponerlos compuestos de un solo trozo de piedra, o de diferentes según se verifica realmente en la práctica. No hay duda que el primer supuesto viene a contenerse en

la fórmula (V), borrando el término $-2/3\ v^3$ originado de quitar al momento del machón el de la superficie *FeE*, Fig. 22: por consecuencia, si refiriéndonos a los cuatro ejemplos discutidos en los núms. 69, 70, 72 y 73, consultamos solamente la fórmula (V), después de hecha la supresión dicha, sacaremos para el primer ejemplo $v = 0{,}21\ l$, para el segundo $v = 0{,}27\ l$, para el tercero $v = 0{,}18\ l$, y para el cuarto $v = 0{,}31\ l$, suponiendo en todos ellos $h = 1/2\ l$; cuando por las fórmulas (T) y (U) que según lo advertido en aquellos números son las que deben consultarse siendo $h = 1/2\ l$, tendremos en el primer ejemplo $v = 0{,}37\ l$, en el segundo $v = 0{,}42\ l$, en el tercero $v = 0{,}35\ l$, y en el cuarto $v = 0{,}49\ l$. No es pues de extrañar, comparando estos valores de v [86/87] con los cuatro primeros, que hasta ahora se hayan mirado con entera desconfianza los resultados dados por la teórica.

76. De todos los métodos gráficos puestos en uso para hallar el grueso de machones, ninguno se aproxima más a los resultados sacados por nuestras fórmulas, que uno cuyo origen es tan antiguo como desconocidos los fundamentos en que estriba. Consiste este método en dividir la curva intradós en tres arcos que abracen cuerdas iguales, y tomar después por grueso la proyección horizontal de la cuerda que parte del arranque: de suerte que expresado analíticamente dicho grueso, viene a ser $v = 2\ l^3 / (3\ l^2 + m^2)$ en las bóvedas elípticas y $v = 2 \operatorname{sen} \alpha/3 \cdot \cos 2\alpha/3 \cdot l/\operatorname{sen}\alpha$ en las escarzanas, llamando α al ángulo de arranque; y así refiriéndonos a las cuatro bóvedas de los números 69, 70, 72 y 73, se tiene $v = 0{,}50\ l$, $v = 0{,}57\ l$, $v = 0{,}60\ l$ y $v = 0{,}65\ l$. Como en esta determinación se prescinde de la altura de los machones, es preciso hacer también la misma abstracción en nuestras fórmulas, refiriéndolas a aquella altura que produzca el mayor grueso: y bajo este concepto, los valores de v sacados teóricamente son $v = 0{,}47\ l$, $v = 0{,}56\ l$, $v = 0{,}53\ l$, y $v = 0{,}72\ l$, como puede inferirse de lo notado en dichos números. Entre estos cuatro valores y los anteriores, no se advierte una diferencia notable, y mucho menos entre los correspondientes a las dos bóvedas primeras, cuyos nacimientos son horizontales: circunstancia que autoriza más el método mencionado, pues los Antiguos rara vez empleaban otra especie de bóvedas.

77. En las aplicaciones anteriores se ha caminado bajo el concepto de que los sillares eran cuadrados, por las razones expresadas en el núm. 59; pero si quisiéramos suponer indeterminadas sus dimensiones, nos fuera fácil hallar la forma

que convenía a las condiciones, y de aquí inferir el modo de discutirlas. En efecto, supongamos que p sea la razón que existe entre la línea y altura de los sillares; y desde luego conoceremos que las condiciones (U) y (X), referidas a arcos escarzanos, deben aparecer así:

$$\frac{1}{2} v^2(K + m) + vP' \operatorname{tang} f - P'h + \frac{p^2h^3}{24} \geq 0, \qquad [87/88]$$

$$-\frac{2}{3p} v^3 + \frac{1}{2} v^2(K + m + h) + vP'' - P'h \geq 0,$$

no teniendo lugar en la primera sino solamente los valores de v que salgan mayores que $1/2\, ph$. Por ejemplo: si el arco es el mismo que el del núm. 72, y suponemos $p = 2$, tendremos las condiciones

$$0{,}3386v^2l + 0{,}0924l^2v - 0{,}1448l^2h + \frac{1}{6} h^3 \geq 0, \qquad (18)$$

$$-\frac{1}{3} v^3 + v^2\left(0{,}3386l + \frac{1}{2} h\right) + 0{,}2924l^2v - 0{,}1448l^2h \geq 0. \qquad (19)$$

Puesto que con sustituir $h = \sqrt{8P' / p^2} = \sqrt{2P'} = 0{,}53\, l$ en la condición (18), resulta para v un valor que no conviene con la circunstancia de ser $v > 1/2\, ph = 0{,}53\, l$, como nos cercioraremos haciendo el cálculo, inferiremos de aquí que el mayor grueso que puede dar esta condición, corresponde a la suposición $v = 1/2\, ph$, y así poniendo $v = 1/2\, ph$, la condición (18) se transforma en la igualación

$$\frac{1}{6} v^2 + 0{,}3386lv - 0{,}0724l^2 = 0$$

de donde sale $v = 0{,}18\, l$, $h = 0{,}18\, l$. Así, pues, desde $h = 0$ hasta $h = 0{,}18\, l$, debe emplearse la condición (18) para determinar el grueso: desde $h = 0{,}18\, l$ hasta $h = 0{,}48\, l$, que es la altura a la cual empieza la condición (19) a dar un valor ma-

yor a v que la condición (18), se hará $v = 0{,}18\ l$; y desde $h = 0{,}48\ l$ hasta el infinito, se empleará la condición (19). Con que si tenemos $h = 1/2\ l$, será $v = 0{,}19\ l$, valiéndonos por consiguiente de la condición (19); en vez de que la condición (14) del núm. 72, nos daría para igual caso $v = 0{,}35\ l$, esto es, una cantidad casi doble de la otra. De esta manera se ve cómo la buena o mala calidad de los materiales influye de un modo notable en el espesor que deben tener los machones, y se pueden explicar los diferentes fenómenos que presentan bóvedas de igual figura y dimensiones, hundiéndose las unas al paso que las otras permanecen sin hacer sentimiento ninguno. Hemos de observar también que con unos mismos materiales puede variar la calidad de la mampostería, según la mayor o menor trabazón que tengan unas con otras las piedras [88/89] que entran en su formación; y puede efectuarse tan mal, que sin embargo de ser grande la línea de éstas con respecto a su altura, resulte para el cálculo como si fuese realmente $p = 0$, con tal que los sillares, o piedras que se sobreponen, formen columnas rectas no interrumpidas, haciendo que sus bases coincidan perfectamente unas con otras. Pero ya insinuamos en el núm. 57, y volvemos a repetir aquí, que lejos de construirse en caso alguno la mampostería con tan defectuosa colocación, se tiene al contrario todo el esmero posible en que las piedras se crucen y traben perfectamente unas con otras; y sólo nos hemos detenido en las reflexiones que anteceden, para que se vea palpablemente la razón de esta práctica tan recibida, y se advierta al mismo tiempo que pueden muy bien someterse al cálculo elementos que parecen estar fuera de su dominio. Por consiguiente, la cantidad p no puede ser nunca menor que 1, según vimos en el núm. 59, y mucho menos igual a cero, si no es que de intento se trate de edificar la bóveda contra todas las reglas de buena construcción.

78. Hasta aquí todo lo tratado en este capítulo se ha reducido a impedir que los machones puedan girar alrededor de los puntos de sus aristas exteriores; y para completar el objeto propuesto en él nos falta discutir la condición (M) que comprende el movimiento mixto de primera especie. Si observamos que la parte más flaca del machón es la hilada *CD* (Fig. 23) más próxima al arranque, el trozo expresado por M'' en aquella condición será igual a la superficie *ACDGBA*, y el ángulo $\alpha'' = 90^{\circ}$, quedando el término $M'X' / (K + x')$ de la misma forma que en los número anteriores. Por tanto, si el extradós es una recta horizontal, como

hemos considerado en los demás casos, y admitimos los supuestos del núm. 65, se tendrá:

$$P' = \frac{M'X'}{K + x'} = \frac{y^2(6K + x)}{12(K + x)},\ P'' = M' = Ky + \frac{1}{3}xy,$$

$$M'' = M' + v(K + m) = P'' + v(K + m); \qquad [89/90]$$

con lo cual la condición (M) se convierte, despejando v, en

$$v \geq \frac{P' - P'' \operatorname{tang} f}{(K + m) \operatorname{tang} f}; \qquad (Z)$$

valor que se preferirá a los sacados de las otras fórmulas, cuando sea mayor que ellos. No me detengo en aplicar esta condición a ningún ejemplo, por no presentar su discusión la menor dificultad: bastará tener presente que en las bóvedas elípticas debe hacerse $x = m - m^2 / \sqrt{3\, l^2 + m^2}$, $y = \sqrt{3\, l^4 / (3\, l^2 + m^2)}$, y en las escarzanas $x = l^2 + m^2 / 4\, m$, $y = [(l^2 + m^2) / 4m] \sqrt{3}$, cuando el ángulo de arranque pase de 60 grados, pues en el caso contrario se hará $x = m$ e $y = l$: todo lo cual es conforme a lo que se dijo en los núms. 68 y 71. Es de advertir que en la fórmula (Z) influye mucho más que en las otras, cualquiera pequeña alteración que se haga en la fricción; por lo que será muy conveniente averiguar primero el verdadero valor de ésta por medio de un experimento directo, antes de pasar a hallar la expresión de v por la fórmula (Z).

79. Por lo visto, las diferentes fórmulas que llevamos desenvueltas para determinar el grueso de machones, son sólo aplicables a bóvedas de cañón seguido; pero si ocurriese hacer la misma investigación con bóvedas de media naranja, se las considerará como de cañón seguido, y con iguales dimensiones y figura que el corte vertical dado en dirección del eje de revolución, a fin de evitar el tener que discutir nuevas fórmulas. Este proceder se puede emplear con toda seguridad, atendiendo a que con él sale constantemente un grueso mayor que el puramente necesario: de cuya verdad nos convenceremos desde luego, si a la media naranja se sustituye una sección suya, hecha del modo que se advirtió en el

núm. 2, y se inscribe a esta sección una bóveda de cañón seguido con las dimensiones anteriormente mencionadas, dándola además el fondo que tiene por el extradós la dovela que separa en la sección el trozo superior que empuja, del inferior que resiste al empuje; y si echamos de ver por último, que el primer trozo de la sección es evidentemente menor, y el segundo mayor, respectivamente, que los separados por la misma dovela correspondientes a la bóveda de cañón seguida inscrita.

Nueva teorica sobre el empuje de bovedas

El Manuscrito

Nueva teorica sobre el empuje de Bovedas

Monasterio



Este trabajo es de un profesor de la primitiva Escuela de Caminos llamado Monasterio, y me lo regaló mi maestro D. Francisco de Traveseda.

Lamana Soraseda

Introduccion.

Es bien extraño que la teorica de bovedas, siendo uno de los ramos de Mecanica que mejor se prestan al analisis por conocerse suficientemente las leyes de los principales elementos fisicos que entran en su discusion, haya sido tratada hasta el presente con tan poca exactitud y extension, no obstante de tener una aplicacion mui inmediata á la practica, y ser su utilidad de las mas conocidas. Si consultamos las obras de cierta clase de Autores que se introducen á tratar especulativamente esta materia, cuando sus conocimientos solo se extienden á dar reglas practicas de construccion, no encontraremos mas que una confusa mezcla de principios de Geometria y de Estatica, mal entendidos y aplicados; y si examinamos las de aquellos cuyo merito en el analisis es bien notorio por el tino con que han desempeñado asuntos de mayor importancia, veremos unicamente calculos fundados en hipotesis falsas, ó formulas inutiles, tanto por la arbitrariedad y restricciones con que están sacadas, como por que solo sirven para impedir algunos movimientos, y no los que mas comunmente adquieren las bovedas. Estos ultimos Autores, por no detenerse á mirar el asunto bajo su verdadero punto de vista, creyeron que para asegurarse de la solidez de un arco, bastaba resolver dos cuestiones que se refiriesen á impedir separadamente los movimientos de traslacion y rotacion, siguiendo en esto el proceder que se observa en
los problemas elementales de
~~todos los elementos de~~ Mecanica; pero la insuficiencia de semejante metodo, aplicado sin mayor extension á las bovedas, se demuestra por la teorica igualmente que por la observacion. Sabemos que un arco es el agregado de varios cuerpos, á quienes se dá el nombre de dovelas, capaces por su figura y colocacion de moverse de diferentes maneras, y al mismo tiempo que para reducir al estado de reposo un sistema de cuerpos ligados entre si y solicitados por varias fuerzas, es necesario tener tantas condiciones que satisfacer, cuantos movimientos diferentes se pueden concebir en él: Asi, pues, si la teorica de Bovedas ha de tener por objeto impedir que

los arcos se vengan abajo, y que padezcan alteraciones susceptibles de perjudicar á su solidez, es claro que no las desempeñaremos debidamente, mientras no se averiguen primero todos los movimientos que pueden adquirir las diferentes partes en que se divide una bóveda, para hallar despues con arreglo á este conocimiento las condiciones correspondientes á evitar cada uno de aquellos movimientos en particular: y solo siguiendo el camino trazado por este razociocinio, conseguiremos que nuestras aplicaciones sean útiles á la práctica, y esten exentas de los errores cometidos hasta aquí.

Es verdad que los movimientos de traslacion y rotacion son los únicos simples conocidos en la Mecánica, y que exigen distintos principios en su discusion; pero no por eso se sigue que han de ser solo dos las condiciones que deban satisfacerse para impedir la ruina de las bóvedas. Un arco cualquiera puede venirse abajo abriendose por uno, dos, tres, ó mas trozos, y ademas cada uno de estos adquirir el movimiento de rotacion ó el de traslacion, esto es, moverse apoyado en uno de los extremos de su junta de rotura, ó resvalando á lo largo de ellas; y es evidente que segun sean diferentes las circunstancias que acompañen á estos movimientos, asi deberán variar de forma las condiciones que los evitan: de suerte que por lo visto, el exacto conocimiento de todas estas circunstancias ha de depender necesariamente del numero de permutaciones que admiten dos letras que representen, la una el movimiento de traslacion, y la otra el de rotacion. En efecto, si por la letra t indicamos el movimiento de traslacion, y por la letra r el de rotacion, y convinamos estas dos letras entre si de todos los modos posibles, sus diferentes permutaciones nos darán á conocer las diversas especies de movimientos que pueden tomar los trozos de un arco, haciendo que el numero de casas de cada permutacion exprese el de los trozos que se ponen en movimiento, y las letras de que consta manifiesten, segun la significacion que acabamos de darlas y el orden con que se hallan escritas, la especie de movimiento con que se supo-

ne obrando cada uno de estos trozos. Asi convenidos, y presentandas las referidas permutaciónes con el orden siguiente:

t, r, tt, tr, rt, rr, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, tttr, ttrt, trtt, rttt, &c.

advertiremos desde luego que las dos primeras y la sexta no pueden tener cavida en el asunto que nos ocupa, por que atendida la figura de cuña de las dovelas, su impenetrabilidad y la convexidad del intrados mirado desde arriba para abajo, ni un trozo puede adquirir aisladamente el movimiento de traslacion, ni menos dos solos el movimiento de rotacion: por consiguiente, devemos descartar las tres permutaciones dichas, y quedan reducidas las otras á

tt, tr, rt, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, tttr, ttrt, trtt, &c.

Si observamos ahora que todas las permutaciones que constan de mas de tres casas, se pueden descomponer, sin alterar el orden con que estan escritas las letras, en grupos enteramente iguales á alguna de las once primeras permutaciones, no admite duda que suponiendo evitados los movimientos expresados por estas once, deven igualmente estar los que se deducen de todas las otras. Por exemplo, la permutacion trrtr se forma de las dos trr y tr, y como suponemos que no tienen lugar los movimientos expresados por estas dos ultimas, quiere decir que los tres primeros trozos deven considerarse unidos y como formando uno solo, y de la misma suerte los otros dos ultimos: luego el movimiento de cinco trozos, expresado por la permutacion trrtr, está implicitamente contenido en los que se refieren á las once primeras. A primera vista parece que tambien se podrian reducir las permutaciones de tres casas á las de dos, haciendo reflexiones analogas á las acabadas de hacer en el exemplo anterior; pero es facil notar que este proceder seria defectuoso aplicado con toda generalidad, por que hay movimientos que no pueden verificarse absolutamente, mientras el arco no se abra lo menos por tres trozos diferentes, tal

es el caso, en que se supone á todos ellos con movimiento de rotacion segun lo representa la Fig.ª 2.ª
Lo que si se puede hacer es reducir todavia á menor numero las onces permutaciones que nos quedan, descartando las cuatro ttr, rtt, rtr, ttt, por que si suponemos los dos primeros trozos con el movimiento que en cada uno de ellos expresan las dos primeras letras, veremos que yá es posible de verificarse la ruina del Arco, sin necesidad de poner en accion al tercer trozo, y por lo tanto la introduccion de este es inutil, pues que con él resulta la cuestion acompañada de mas datos que los necesarios para resolverla. Esto nos dá á entender que los movimientos expresados por las cuatro permutaciones referidas se incluyen realmente en los dimanados de considerar las tres tt, tr, y rt, que ya tenemos, y que resultan de quitar á aquellas la ultima letra: de consiguiente, concluiremos por ultimo que todos los diferentes movimientos con que un Arco puede venirse abajo, estan contenidos en la consideracion de las siete permutaciones siguientes:

tt, rrr, rrt, trr, tr, rt, trt.

El movimiento expresado por la primera permutacion, lo representa la Fig.ª 1.ª con los dos trozos M, N' y N' M'' que se suponen resvalando por sus respectivas juntas de lecho, el primero en direccion de N, á M, y el segundo en la de M'' á N''. El movimiento de la permutacion rrr se indica en la Fig.ª 2.ª por medio de los tres trozos M,, N, , N, M'' y M' N'' que se suponen obrando á un mismo tiempo con movimiento de rotacion, y de forma que si el primer punto M,, de apoyo se considera como aqui en el intrados, el segundo N, deve estar en el extrados, el tercero M' en el intrados, y el cuarto N'' en el extrados. La fig.ª 3.ª espresa el movimiento de la permutacion rrt, y la Fig.ª 4.ª el movimiento de la siguiente trr: siendo de advertir que el trozo M' N'' en la Fig.ª 3.ª, y el trozo M,, N, en la Fig.ª 4.ª se consideran resvalando, el primero hacia el centro

del arco, y el segundo en sentido contrario, por que de no admitir esta diferencia, los dos casos estarian acompañados de unas mismas circunstancias, y las permutaciones rrt y trr, vendrian en substancia á expresar una sola especie de movimiento, pudiendo dar dos distintas. En las fig.as 5.a y 6.a se ven respectivamente los movimientos dimanados de las permutaciones tr, y rt, con la misma diferencia que hemos hecho notar en las dos figuras anteriores por lo que respecta á la direccion en el movimiento de los trozos que resvalan, y por razones identicas á las dadas en aquel caso. Finalmente, el movimiento deducido de la ultima permutacion trt se manifiesta en la Fig.a 7.a por los trozos M,, N, , N, M' y M' M'', de los cuales el primero y tercero resvalan por sus juntas respectivas de lecho en direcciones opuestas, y el segundo gira apoyado en los puntos N, y M' comunes á las juntas de este trozo y á las superiores de los otros dos. Estas son en resumen las siete especies de movimientos que deven evitarse en las bovedas, hallando un numero igual de condiciones que se dirijan á conseguir dicho objeto; pero antes de entrar en esta investigacion, y á fin de entendernos y explicarnos mas expeditamente, llamaremos desde aqui adelante movimientos puros de traslacion y rotacion á los espresados por las Fig.as 1.a y 2.a, y á los cinco restantes, movimientos mixtos de primera, segunda, tercera, cuarta y quinta especies, segun el orden que guardan entre si las Fig.s 3.a 4.a 5.a 6.a y 7.a que los representan. Asi que dividiremos esta obra en cuatro Capitulos: en el primero y segundo hallaremos y discutiremos respectivamente las condiciones con que se evitan los movimientos puros de traslacion y de rotacion: en el tercero, las correspondientes á los cinco movimientos mixtos; y vista la complicacion que conservan todas las siete condiciones generales cuando los arcos no son simetricos, las reduciremos á otras mas sencillas, y de mas facil discusion, valien-

donos para conseguir esto de una reflexion que haremos muy admisible, porque favorece la solidez sin desviarnos mas que lo preciso de la exactitud. Ultimamente, en el capitulo cuarto aplicaremos la doctrina expuesta en los anteriores á la investigacion del grueso que deben tener los estribos, suponiendolos compuestos de diferentes piezas que representen los sillares, tal cual se verifica en la practica, y no formados de un solo trozo de piedra segun lo han hecho hasta aqui todos los Autores: diferencia que produce una alteracion notavilisima en los calculos conforme veremos.

Interesando á la practica que las bovedas tengan una robustez capaz de resistir á los accidentes á que estan comunmente sujetas por su destino, y siendo imposible conseguir esta apreciable circunstancia, dandolas la figura que exige el estado de equilibrio perfecto; en estas investigaciones hemos de dirigirnos principalmente á que la resistencia que opone un trozo cualquiera para moverse, sea siempre mayor que la fuerza que lo solicita haciendo veces de potencia; y en este concepto las siete formulas arriva dichas no deven hallarse en forma de equaciones, sino de condiciones cuyos miembros se vean separados por uno de los signos conocidos de desigualdad. De este modo, determinada la figura del Arco, eligiendo la mas apta para desempeñar el objeto propuesto en su construccion, podremos facilmente hacer que la boveda satisfaga á las condiciones establecidas por la teorica, ya aumentando ó ya disminuyendo, segun convenga, algunas de sus dimensiones, sin vernos en la precision, para conseguir esto, de que el intrados ni extrados formen otras curbas diferentes de las proyectadas, como seria preciso hacer que las formaren, sinos redujeramos á tratar exclusivamente del equilibrio, porque en él, en vez de condiciones, tendriamos solamente equaciones que, como se sabe, ~~fixan~~ ~~determinan~~ ~~valor~~ dan valor fixo y determinado á las cantidades. Ademas, pudiendose abrir los arcos por tantas partes diferentes, cuantas son sus juntas de lecho, para estar seguros de que aquellas condiciones se verifican en toda la extension de la boveda, devemos referirnos á aquella posicion de trozos mas poderosa para

hacerlos volcar; pues claro está que si el movimiento no se verifica considerados los trozos mas dispuestos á moverse, menos se verificará con cualesquiera otros ~~[illegible]~~: de donde se deduce que la discusion de las formulas en cuestion deve finalizarse determinando las variables que contienen, por medio de la doctrina de maximos y minimos, y no valiendose, como se ha hecho comunmente, de observaciones practicas que solo tienen lugar cuando mas en arcos exactamente ~~en arcos enteramente~~ semejantes á los que las ~~han suministrado~~ suministraron.

Enterados de todo cuanto dejamos dicho, nos fuera ya facil dar una justa idea del merito de las mejores obras que hay escritas sobre el empuje de bovedas, haciendo relacion al plan que sus Autores devian haber seguido para que sus calculos presentasen aplicaciones utiles á la practica. Veriamos que M. Coulomb la hubiera desempeñado mejor que ningun otro, si establecidos los problemas con mayor generalidad y resueltos en mayor numero, no hubiera confundido en una sola las dos fuerzas horizontales dimanadas de considerar un trozo, ya como potencia, ó ya como resistencia: suposiciones que hacen se diferencien entre si aquellas fuerzas, constantemente en los movimientos de rotacion, y en los de traslacion cuando se introduce el rozamiento. Con respecto á M. Bossut observa~~mos~~riamos que dirigiendose principalmente á establecer en las bovedas el equilibrio de traslacion, la mayor parte de sus formulas vienen á ser meras especulaciones de calculo, y solamente el problema que resuelve para hallar el grueso de Machones, podria ser util en algun caso al arte de construir, si hubiera considerado al trozo superior que produce el empuje, con movimiento de rotacion en lugar del de traslacion que nunca ó rarisima vez se verifica en la practica. Finalmente, observando, que de todas las demas obras escritas sobre el asunto, se puede con corta diferiencia formar el mismo juicio que acabamos de hacer de la de M. Bossut, pasariamos despues de este examen á notar los muchos errores

que se han padecido en el modo de descomponer las fuerzas, y en la admision de ciertas hipotesis; pero nos contentaremos solo con manifestar los mas principales en el fondo de la Obra, cuando la materia que se discuta tenga relacion con ellos; y concluiremos ya esta introduccion satisfaciendo á dos reparos que pueden proponerse.

El primero es, que supuesto introducimos en esta teorica el efecto del rozamiento, por la misma razon parece que devia tambien introducirse el de la coherencia del mortero interpuesto entre las juntas de lecho de las dovelas, á lo cual contestaré: que prescindimos de la fuerza de coherencia, por ser insensible ó casi nula cuando el mortero se halla blando, esto es, recien construidos los Arcos: tiempo, al cual deven referirse nuestras formulas, por ser la epoca en que aquellos corren mas riesgo de arruinarse. Y que contamos con el efecto de la friccion, porque el objeto de dar á las bovedas un estado mas firme y permanente que el del equilibrio, no puede conseguirse, segun veremos mas adelante, si no se admite una fuerza pasiva, cual es el rozamiento, que obrando solo como resistencia sofoque el movimiento que intentan producir las activas que son en nuestro caso los pesos de las dovelas.

El segundo reparo se dirije á que en la numeracion hecha de todos los diversos movimientos que pueden ocasionar la ruina de las bovedas, no se hace mencion de aquel que proviene de no tener la materia con que está edificado el Arco, la suficiente consistencia para resistir las presiones que se hacen reciprocamente las dovelas; y aunque es verdad que esta objecion no carece á primera vista de fundamento, como por otra parte los experimentos hechos para conocer y medir la dureza de las piedras, dan unos resultados sumamente favorables á la practica, podemos mui bien desentendernos

de calcular si las dovelas, pilares y demas partes del arco tienen la suficiente robustez para aguantar sin desmoronarse á las presiones que sufren, seguros de que la tendrán, mientras sus dimensiones, por pequeñas que parezcan con relacion á este objeto, guarden las proporciones que exigen las demas consideraciones que llevamos mencionadas en los articulos anteriores.

Capitulo primero.

De las condiciones necesarias para evitar los movimientos puros de traslacion.

1. Con el fin de dar á estas investigaciones toda la extension posible, prescindimos que las bovedas sean de cañon seguido ó de media naranja, y que las juntas de lecho tengan una direccion determinada; pero supondremos infinito el numero de estas juntas en todos los arcos, para que asi esten sujetas á la ley de continuidad las formulas que deduzcamos, y la boveda se considere con mas partes aptas por donde pueda abrirse, que juntas tiene en su estado verdadero: lo que es una circunstancia que se dirije á favorecer mas la solidez.

2º. Para concebir en las medias naranjas los siete movimientos expresados en la introduccion con la misma facilidad que en las bovedas de cañon seguido, supondremos aquellas cortadas por una infinidad de planos que pasando por el exe de rebolucion formen entre si angulos infinitamente pequeños; y de esta suerte, considerando cada seccion de las que resultan como una boveda aislada en donde pueden ya mui bien verificarse dichos movimientos, reduciremos el examen de las medias naranjas al de una seccion suya acompañada de las circunstancias referidas.

3. Las fuerzas que introducimos en estos calculos son constantemente pesos de trozos de boveda; y los pesos midiendose por el producto de los tres factores, gravedad, densidad y volumen de los cuerpos á quienes pertenecen, pueden ser reemplazados por dicho producto, con lo cual las formulas en que se haya hecho esta substitucion, apareceran, en el supuesto de ser homogenea la boveda, divisibles por los dos primeros factores, y quedarán despues de efectuada la division, de la misma forma que si por los pesos se hubieran substituido desde luego los volumenes. Asi, por el peso ó fuerza de un trozo en-

tendremos generalmente su volumen, siempre que no se advierta si la boveda es de cañon seguido ó de media naranja; pero si se supone lo primero, entonces por el peso de un trozo entenderemos solo la superficie ó cara que presenta en el alzado: porque en este caso de los dos factores, el ancho de la boveda y dicha superficie, cuyo producto mide el volumen del trozo en cuestion, el primero es comun á todos los trozos de la boveda.

4. Antes de entrar á hablar del movimiento puro de traslacion que es el objeto de este capitulo, haremos algunas advertencias preliminares que nos ahorrarán en lo sucesivo muchas digresiones. Dijimos en la introduccion, por las razones alli expuestas, que eran imposibles los movimientos deducidos de las tres permutaciones 4, 5, 55; pero si ahora nos desentendemos de toda consideracion particular para hallar analiticamente hasta las mas claras y evidentes propiedades que deven gozar los arcos, encontraremos ser necesario, á fin de que los movimientos de las tres permutaciones dichas no tengan lugar: 1.º que las juntas de lecho $M_{\prime\prime}N_{\prime\prime}$, $M_{\prime}N_{\prime}$, &c (Fig.ª 18) sean convergentes desde la parte del extrados hacia la del intrados, formando ademas con la vertical angulos $M_{\prime\prime}R_{\prime\prime}A$, $M_{\prime}R_{\prime}A$, &c menores que el recto. 2.º que la vertical que pasa por el centro de gravedad de un trozo $M''N''N'M'$ cualquiera, caiga entre los puntos M'' y N'' de su junta, ó entre el punto M'' y el claro del intrados; pero de ninguna manera mas allá del punto N'' hacia la parte de afuera del extrados. 3.º que sea siempre menor que dos rectos el angulo $M_{\prime\prime}N_{\prime}M'$ formado en un punto cualquiera del extrados por dos rectas tiradas desde este punto á otros dos $M_{\prime\prime}$ y M' del intrados. 4.º y ultimo, que toda linea $M'N_{\prime}r$ tirada desde un punto del intrados, forme un angulo $M'rR_{\prime\prime}$ menor que el recto con la junta $M_{\prime\prime}N_{\prime\prime}$ que encuentra siguiendo aquella direccion, ó con su prolongacion $M_{\prime\prime}r$. Supuesto que las bovedas en quienes no se verifican estas cuatro condiciones, han de venirse necesariamente abajo por su propio peso, como es facil inferir á la simple vista; solo consideraremos aqui las que satisfagan en toda su extension á las condicio-

-nes referidas, pues claro está que semejantes bovedas son las que unicamente deven emplear-se en la construccion, y porconsiguiente sujetarse al examen de si pueden ó no mantenerse en pie.

5. En las bovedas simetricas se llama clave aquella dovela que se halla en medio de las demas, y viene siempre á estar en el punto mas alto de la curba interior: supongamos aquí, generalizando esta ultima propiedad, que clave es, sean ó no simetricas las bovedas, aquella dovela que está situada en el punto mas elevado de la curva intrados, y hagamos pasar por este punto los exes vertical y horizontal de las coordenadas correspondientes á las curbas interior y exterior. Esto supuesto, y para desembarazarnos de digresiones que pueden evitarse desde el principio, pondremos aquí juntas todas las denominaciones de aquellas cantidades cuyo uso es mas frecuente en este capitulo y siguientes, llamando constantemente (veanse las fig.s 1.a, 2.a, 3.a, 4.a, 5.a, 6.a, y 7.a):

Los trozos $AM'N'B$, $AM''N''B$, AM_1N_1B, $AM_{11}N_{11}B$, ---------- M', M'', M_1, M_{11}.

Las ordenadas de los puntos M', M'', M_1, M_{11} del intrados ------- y', y'', y_1, y_{11}.

Las abcisas correspondientes, contadas desde el punto A interior de la clave, ---------------- x', x'', x_1, x_{11}.

Las ordenadas de los puntos N', N'', N_1, N_{11} del extrados ----- u', u'', u_1, u_{11}.

Las abcisas respectivas á estos puntos, contadas tambien desde el mismo punto A. ------------ z', z'', z_1, z_{11}.

Las distancias de los puntos M', M'', M_1, M_{11} á las verticales que pasan por los centros de gravedad de los trozos $AM'N'B$, $AM''N''B$, AM_1N_1B, $AM_{11}N_{11}B$. ---------------- X', X'', X_1, X_{11}.

Las distancias de estas mismas verticales á los puntos N', N'', N_1, N_{11} --- Z', Z'', Z_1, Z_{11}.

Los angulos que forman las juntas de lecho $M'N'$, $M''N''$, M_1N_1, $M_{11}N_{11}$ de dichos trozos con la vertical ---------------- α', α'', α_1, α_{11}.

La altura AB de la clave ---------------- k

Y el angulo llamado de rozamiento, suponiendolo constante

segun lo acredita la experiencia.............................. f.

6. Teniendo presentes estas ~~[illegible]~~ denominaciones, empecemos ya á considerar el movimiento puro de traslacion de los trozos $M''N''$ y $N'M_1$ (fig.ª 1ª), que es el caso general que comprende á todos los demas de la misma especie. Para esto desde un punto cualquiera φ de la vertical que pasa por el centro de inercia del trozo $M_1N' = M' + M_1$, descompongamos el peso de este trozo en dos F' y F_1, que dirigiendose respectivamente hacia las juntas $M'N'$ y M_1N_1 formen con su resultante los angulos λ' y λ_1: la fuerza $F' = \frac{(M'+M_1)\,sen.\lambda_1}{sen.(\lambda'+\lambda_1)}$. en dos, la primera perpendicular y la segunda paralela á la junta inferior $M''N''$ del trozo $M'N'$; con lo cual $F'sen.(180^o-\lambda'-\alpha'')$ será la primera componente, y $F'cos.(180^o-\lambda'-\alpha'')$ la segunda: de consiguiente $F'cos.(180^o-\lambda'-\alpha'') - F'tang.f\,sen.(180^o-\lambda'-\alpha'')$, ó su igual -------------------------

$$\frac{(M'+M_1)\,sen.\lambda_1}{cos.f\,sen.(\lambda'+\lambda_1)}\left\{sen.\lambda'\,sen.(\alpha''-f) - cos.\lambda'\,cos.(\alpha''-f)\right\} \text{ - - - - - - - - - (1)}$$

expresará el esfuerzo con que el trozo M_1N' intenta hacer resvalar al segundo $N'M''$ por su junta inferior de lecho en la direccion de M'' á N''

7. Puesto que los trozos M_1N' y $M''N'$ estan de tal suerte ligados entre si, que el uno no puede moverse sin hacer otro tanto el otro; no basta, para que se efectue el movimiento en ambos, que el primero venza la resistencia que opone el segundo á lo largo de la junta $M''N''$, si no que es necesario tambien que quede al mismo tiempo destruida la fuerza que produce la friccion en las juntas $M'N'$ y M_1N_1. Pero la experiencia acredita que una fuerza que impele á un cuerpo sostenido por un plano, no empieza á producir efecto, sino hasta tanto que el angulo formado por la fuerza y el plano, es menor que el complemento del angulo de rozamiento; y es facil inferir de aqui que para satisfacer á la ultima circunstancia, deve hacerse $\lambda' < 90^o - f - \alpha'$, $\lambda_1 < 90^o - f - \alpha_1$.

8 Por otra parte, siendo el objeto de la cuestion ver si el trozo $M'N_1$ consigue llevar de-

lante de si al trozo $M'N''$, devemos considerar el empuje mayor que aquel puede producir contra este, quiero decir, el mayor valor de que es capaz la cantidad (1) haciendo variar convenientemente las indeterminadas λ' y λ_1. Dicha cantidad (1), examinada bajo la forma

$$\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha''-f)}{\cos.f}\left\{\frac{\tan g.(\alpha''-f)-\cot.\lambda'}{\cot.\lambda'+\cot.\lambda_1}\right\},$$

crece palpablemente á medida que cot. λ_1 es menor: y para ver que la sucede otro tanto á medida que cot. λ' es tambien menor, no hay mas que ponerla bajo esta otra forma.

$$\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha''-f)}{\cos.f}\left\{\frac{\tan g.(\alpha''-f)+\cot.\lambda_1}{\cot.\lambda_1+\cot.\lambda'}-1\right\};$$

pero cot. λ_1 y cot. λ' disminuyen al paso que los angulos λ_1 y λ' son mayores, y como estos angulos no pueden pasar de los limites que les hemos prescrito en el numero anterior; para satisfacer, pues, al objeto de la cuestion en todo lo que permiten dichos limites, sera precíso hacer en la cantidad (1) $\lambda'=90^\circ-\alpha'-f$, $\lambda_1=90^\circ-\alpha_1-f$; y tendremos por fin la expresion

$$\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha_1+f)}{\cos.f\,\text{sen}.(\alpha'+f+\alpha_1+f)}\left\{\text{sen}.(\alpha''-f)\cos.(\alpha'+f)-\cos.(\alpha''-f)\,\text{sen}.(\alpha'+f)\right\},$$

ó bien su equivalente

$$\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha_1+f)\,\text{sen}.(\alpha''-f-\alpha'-f)}{\cos.f\,\text{sen}.(\alpha'+f+\alpha_1+f)}\text{ - - - - - - - - - - - - - - - (2)}$$

para indicar el esfuerzo mayor que puede suponerse en el trozo M_1N' para empujar al inferior en la direccion de su vase, teniendo en consideracion el rozamiento, y su verdadero modo de obrar. Restada la cantidad (2) de $\frac{(M''-M')\cos.(\alpha''-f)}{\cos.f}$ que expresa la resistencia que opone el trozo $M''N'=M''M'$ para moverse en la direccion de M'' á N', sacaremos la condicion

$$(M''-M')\cos.(\alpha''-f)-\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha_1+f)\,\text{sen}.(\alpha''-f-\alpha'-f)}{\text{sen}.(\alpha'+f+\alpha_1+f)}\geqq 0,\text{ - - - - - - - - (3)}$$

que evitará el movimiento puro de traslacion, siempre que quede satisfecha refiriendo los angulos α'', α', α_1, y por consiguiente sus dependientes M'', M', M_1, á todas las puntas de techo. Empleamos el doble signo $\geqq 0$ para indicar que la can-

-tidad que le precede deve ser positiva, ó á lo menos igual á cero.

9. Nosotros hemos venido, por final de todas las reflexiones hechas, á descomponer el peso $M'+M_1$ en dos fuerzas que forman respectivamente con las juntas $M'N'$ y M_1N_1 (Fig.ª 1.ª) angulos iguales al complemento de f; pero si en vez de esta descomposicion, empleasemos la que comunmente se sigue en la resolucion de los problemas de Mecanica cuando se introduce el rozamiento, ó lo que es lo mismo, la que se deduce del ~~proceder empleado~~ ordinariamente para ponerlos en equacion, sacariamos otra formula distinta de la que acabamos de hallar. En efecto, consistiendo aquel metodo en considerar el rozamiento como una verdadera fuerza activa que obra paralelamente al plano en que se produce; si nosotros descomponemos el peso $M'+M_1$, modificado por la friccion, en dos fuerzas P' y P_1 perpendiculares á las juntas $M'N'$ y M_1N_1, la resultante de las cuatro P', $P'\tang.f$, P_1 y $P_1\tang.f$, deve ser igual á $M'+M_1$. Halladas de este modo las incognitas P' y P_1, tendremos $P' = \frac{(M'+M_1)\cos.f\cos.(\alpha_1+f)}{\text{sen.}(\alpha'+f+\alpha_1+f)}$, $P_1 = \frac{(M'+M_1)\cos.f\cos.(\alpha'+f)}{\text{sen.}(\alpha'+f+\alpha_1+f)}$; y descomponiendo la primera, que es la sola que ocasiona el empuje contra el trozo $M'N''$, en dos, una perpendicular y otra paralela á la junta $M''N''$, la presion que sufre esta junta será $= P'\cos.(\alpha''-\alpha') + (M''-M')\text{sen.}\alpha''$, y la fuerza que queda al trozo $M'N''$ en direccion de M'' á N'', sin contar con el rozamiento producido en la junta $M''N''$, $= P'\text{sen.}(\alpha''-\alpha') - (M''-M')\cos.\alpha''$: restando esta expresion de la anterior multiplicada por $\tang.f$, y reduciendo al mismo tiempo, pasaremos en la condicion

$$(M''-M')\cos.(\alpha''-f) - \frac{(M'+M_1)\cos.f\cos.(\alpha_1+f)\,\text{sen.}(\alpha''-f-\alpha')}{\text{sen.}(\alpha'+f+\alpha_1+f)} \geqq 0 \quad \text{-------}(4)$$

que, como se vé, es diversa de la sacada en el num.º 8.

10. Aunque la condicion (3) no necesita de mas apologia que la sencilla exposicion de los raciocinios empleados para deducirla, y por otra parte la ilegiti-

-midad de la (4) queda bastantemente probada con solo tener presente que el rozamiento, no siendo mas que un puro obstaculo que se opone al movimiento, es incapaz de descomponerse del mismo modo que una fuerza activa, pues sin las consideraciones que suministra la idea de movimiento dexaria de existir el teorema del paralelogramo de fuerzas; sin embargo, para mayor convencimiento, aplicaremos uno y otro metodo á un caso, cuyo resultado se sepa ya de ante mano y con toda evidencia. Hemos dicho que la presion de la junta $M''r''$ es igual por el ultimo metodo á $P'\cos.(\alpha''-\alpha')+(M''-M')\,\text{sen}.\alpha''=\frac{(M'+M_1)\cos.f\cos.(\alpha_1+f)\cos.(\alpha''-\alpha')}{\text{sen}.(\alpha'+f+\alpha_1+f)}+(M''-M')\,\text{sen}.\alpha''$, y podemos facilmente hallar que por el nuestro sale igual á $F'\cos.(\alpha''-\alpha'-f)+(M''-M')\,\text{sen}.\alpha''=\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha_1+f)\cos.(\alpha''-\alpha'-f)}{\text{sen}.(\alpha'+f+\alpha_1+f)}+(M''-M')\,\text{sen}.\alpha''$. Supongamos ahora que estas dos espresiones se refieren á una boveda simetrica en la que se hace $M'=M_1$, $\alpha'=\alpha_1$ y $\alpha''=90°$: la primera se convertirá con estas substituciones en $M''-\frac{M'\cos.\alpha'\text{sen}f}{\text{sen}.(\alpha'+f)}$, y la segunda simplemente en M''; y como la presion que experimenta una base horizontal, deve ser precisamente igual al peso que sostiene esta, sea grande, pequeño ó nulo el rozamiento, se infiere que el resultado deducido de nuestra descomposicion es tan consiguiente á la verdad de la proposicion que acabamos de mencionar, como falso y erroneo el que sale de la expresion $M''-\frac{M'\cos.\alpha'\text{sen}f}{\text{sen}.(\alpha'+f)}$ dada por el metodo comun.

1. En la investigacion de la condicion (3) pudieramos haber descompuesto inmediatamente el trozo $M'+M_1$ en dos fuerzas que formasen con sus respectivas juntas el angulo de $90°-f$, sin que por eso deviese parecer extraña esta descomposicion, puesto que las mismas razones que obligan á tirar las componentes perpendiculares á las juntas cuando se prescinde del rozamiento, estan de parte de la otra descomposicion cuando se le quiere considerar. Sin embargo, nos ha parecido mas conveniente el no dar desde luego semejante direccion á las componentes de $M'+M_1$, primeramente por que este proceder, siendo al fin nuevo, exijia estar apoyado en razones que lo sostubieran,

y en segundo lugar por que en esta teorica nos hemos propuesto la idea de plantear los problemas con todas las indeterminaciones que presenta la descomposicion de una fuerza en otras dos, para hacer desaparecer despues estas indeterminadas por consideraciones propias del objeto principal que se lleva en ellos, sin intervencion de arvitrariedad ninguna substancial que influya en los resultados. Esta advertencia parecerá ~~mucho~~ mas interesante de hacer, cuando se note que del olvido total de ella proviene principalmente la diversidad de resultados que se observan en la resolucion de unos mismos problemas, segun son los Autores que los tratan. Couplet y Prony, al determinar el empuje que hace el Arco contra los estrivos ~~para [illegible]~~ en el concepto de girar estos al rededor del punto exterior de sus bases, dirijen las fuerzas en que descomponen el peso de la parte superior de la boveda, por medio de sus juntas de lecho ~~ó de [illegible]~~; y Taramas, Rondelet y otros consideran á estas mismas fuerzas con ~~otras~~ direcciones diferentes, haciendolas pasar por el centro de gravedad de la resultante, esto es del peso descompuesto. Ambos procedimientos, ~~que dan no obstante~~ ademas de dar á la componente que produce el empuje, momentos diferentes entre si y del que deve realmente tener, ~~estan apoyados segun el sentir de sus respectivos Autores en principios de Mecanica mui sencillos y que todos conocen, pero no es mas que en la apariencia, por que tales principios, aunque~~ verdaderos como ~~exactos mi~~todos, cuando se emplean en su propio objeto, ~~[illegible]~~, son enteramente arbitrarios ~~extraños~~ y en ninguna manera aplicables al problema que se intenta resolver, conforme manifestaremos claramente en el nº 51., que es en donde con mas particularidad toca tratar de este punto.

18. Volviendo la vista á la condicion (3), tratemos de darla una forma mas comoda para las aplicaciones que haremos de ella; pero antes de esto, es preciso notar que en una expresion que indica la desigualdad de dos cantidades, no sucede lo que en una equacion

 20

que puede multiplicarse y dividirse por cualesquiera cantidades sin que se altere en nada la igualacion. Para hacer estas operaciones en formulas parecidas á la condicion (3), es preciso que la cantidad por quien se van á dividir ó multiplicar sus miembros sea constantemente positiva, por que de lo contrario, trasformandose los signos positivos en negativos y los negativos en positivos, la formula aparecerá, despues de efectuada la operacion, convertida en otra diametralmente opuesta á lo que deve expresar. Asi, pues, no olvidando esta advertencia, pasemos á multiplicar la condicion (3) por $sen.(\alpha'+f+\alpha_1+f)$, que por lo que diremos en el numero proximo ha de suponerse acompañado del signo positivo, y quedará trasformada en

$$a'M''-b'M'-c'M_1 \geqq 0, \text{ - - - - - - - - - - - - - - (A)}$$

haciendo para mayor comodidad

$$\left.\begin{aligned} a' &= cos.(\alpha''-f)\,sen.(\alpha'+f+\alpha_1+f), \\ b' &= cos.(\alpha'+f)\,sen.(\alpha''+\alpha_1) = a'+c', \\ c' &= cos.(\alpha_1+f)\,sen.(\alpha''-f-\alpha'-f). \end{aligned}\right\} \text{ - - - - - - - - - - - - (5)}$$

13. El metodo directo de discutir la condicion (A) seria hallar por medio de la diferenciacion los valores de α'', α' y α_1, que convierten en un maximo á su primer miembro, y luego ver si con esta substitucion salia positiva la cantidad $a'M''-b'M'-c'M_1$; pero empleando semejante proceder, resultarian calculos mui largos y complicados por la mezcla que hay de cantidades algebricas con trascendentes, y no hallarse ademas separadas las variables α'', α' y α_1. Para remediar en parte este ultimo inconveniente, advertiremos que existiendo entre los coeficientes a', b' y c' la relacion

$$a'\,tang.(\alpha''-f) - b'\,tang.(\alpha'+f) - c'\,tang.(\alpha_1+f) = 0, \text{ - - - - - - - - (6)}$$

si despejamos de aqui el valor de a' y lo substituimos en la condicion (A), se podrá esta poner, despues de dividir por $sen.(\alpha''+\alpha_1)\,sen.(\alpha''-f-\alpha'-f)$, bajo la forma siguiente:

$$\frac{sen.(\alpha'+f)}{sen.(\alpha''-f-\alpha'-f)}\{M''cot.(\alpha''-f)-M'cot.(\alpha'+f)\}+\frac{sen.(\alpha_1+f)}{sen.(\alpha''+\alpha_1)}\{M''cot.(\alpha''-f)-M_1cot.(\alpha_1+f)\}\gtreqless 0 \quad (7).$$

en donde vemos ser el primer termino funcion de las dos variables α'' y α', y el segundo de α'' y α_1. Referiremos, pues, la letra M'' al trozo contado desde la clave hasta uno de los dos arranques, por que comunmente son estos los parages mas expuestos del arco: con lo cual, quedando ya los dos terminos de la condicion (7) funciones de una sola variable cada uno, sus respectivos minimos podran expeditamente hallarse, ó por la diferenciacion, ó por tanteos dando á estas diferentes valores: si la suma de estos minimos es positiva, ya se empiezen á contar los trozos M'', M' y M_1 desde el arranque izquierdo al derecho, ó yá desde el derecho al izquierdo como se supone en la figura 1ª, concluiremos de este calculo que el movimiento puro de traslacion no tiene de modo alguno lugar en la boveda. Se ha de evitar el considerar en todas estas substituciones y tanteos aquellos valores de α'', α' y α_1 que hagan negativas las cantidades $\alpha''-f-\alpha'-f$, $90^o-\alpha'-f$, $90^o-\alpha_1-f$, por que si estas lo son, lo seran tambien la fuerza P' y el empuje que el trozo $M'+M_1$ produce contra el inferior $M''-M'$; y de consiguiente imposible que este ultimo trozo pueda resvalar en la direccion de M'' á N''; y absolutamente ocioso el substituir tales valores de α'', α' y α_1 en la condicion (7) para averiguar lo que ya se sabe de cierto.

14 Una vez que para la discusion de la condicion (A.) ó su igual (7) deben considerarse solamente los valores positivos de $\alpha''-f-\alpha'-f$, $90^o-\alpha'-f$, $90^o-\alpha_1-f$, es facil demostrar con esto y teniendo presente la primera condicion del num.º 4, que $sen.(\alpha''-f-\alpha'-f)$, $cos.(\alpha'+f)$, $cos.(\alpha_1+f)$ y $sen.(\alpha'+f+\alpha_1+f)$ han de resultar necesariamente acompañados del signo positivo, y de aqui inferir lo mismo con respecto á los coeficientes a', b' y c', puesto que el primero es el producto de $cos.(\alpha''-f)$ y $sen.(\alpha'+f+\alpha_1+f)$, el tercero de $cos.(\alpha_1+f)$ y $sen.(\alpha''-f-\alpha'-f)$, y el segundo igual á la suma de estos dos productos. Nos detenemos en hacer todas estas advertencias para cumplir con lo que ofrecimos en el num.º 12, y ademas por que en suponer positivas las cantidades a', b' y c' estriba en gran parte lo que demostra-

remos en el num.º 19.

15. De lo expuesto en el num.º 13 se infiere desde luego que las bovedas en quienes no pueda resultar positiva la cantidad sen.$(\alpha''-f-\alpha'-f)$ bajo ninguna junta de lecho se hallan incapaces de adquirir el movimiento puro de traslacion, aun cuando cargue sobre ellas un peso cualquiera. Para que sen$(\alpha''-f-\alpha'-f)$ este acompañado necesariamente del signo negativo, sin pasar del limite que señalan los angulos de arranque, es preciso que la suma de estos angulos sea menor que el duplo del angulo de rozamiento: por que $\alpha''-\alpha'-2f$ sera indispensablemente negativa en todas las juntas contenidas entre los arranques, siempre que haciendo $\alpha''=AR'C'$ y $-\alpha'=AR_1C_1$ (Fig. 20) que son sus mayores valores sea $AR'C'+AR_1C_1<2f$. Se vé, pues, que los arcos escarzanos, son los que unicamente pueden gozar de esta apreciable propiedad; sin embargo, entre los llamados Practicos hay una cierta prevencion contra esta especie de Arcos. Aqui prescindimos del movimiento que pueden adquirir los machones en virtud del empuje que contra ellos producen las dovelas, por que de esto se tratará exclusivamente en el capitulo cuarto; pero si queremos tambien ~~tambien~~ extender á los machones la consecuencia sacada, será necesario referir el angulo α'' al que forman las vases de estos con la vertical, y de consiguiente tener $AR_1C_1+AO'F'<2f$, $AR'C'+AO_1F_1<2f$: condiciones que siendo $AO'F'=AO_1F_1=90°$, no pueden verificarse al menos que el rozamiento no sea extraordinariamente grande, ó en su defecto se supongan dichas vases inclinadas lo suficiente al horizonte, segun lo representan las lineas $F'e'$ y F_1e_1, y por lo tanto paralelas á estas lineas todas las hiladas de los sillares que forman los estribos.

16. Si el rozamiento no existiera, la condicion (A) tendria la forma:

$$M''\cos.\alpha''\,\text{sen.}(\alpha'+\alpha_1)-M'\cos.\alpha'\,\text{sen.}(\alpha''+\alpha_1)-M_1\cos.\alpha_1\,\text{sen.}(\alpha''-\alpha')\gtreqless 0 \text{ - - - - - - - } (8)$$

Como esta condicion debe tambien verificarse empezando á contar los trozos M'', M' y $M_,$ por el lado izquierdo, si suponemos que $M_{,,}N_,$ y $N_,M'$ (Fig.ª 1.ª) son los considerados en este caso, tendremos ademas de la condicion (8) esta otra:

$$M''\cos.\alpha''\text{sen.}(\alpha'+\alpha_,)-M'\cos.\alpha'\text{sen.}(\alpha''+\alpha_,)-M_,\cos.\alpha_,\text{sen.}(\alpha''-\alpha')\gtreqless 0 \text{------} (8).$$

Considere ahora que los trozos $N_,$ y M' y $M_{,,}N_,$ toman el primero la posicion de $M'N'$, y el segundo la de $N_,M_,$; con lo cual substituyendo en la condicion ultima M'' por M', M' por $-M_,$, y $M_,$ en vez de $M_{,,}$, valdra

$$-M'\cos.\alpha''\text{sen.}(\alpha'+\alpha_,)+M'\cos.\alpha'\text{sen.}(\alpha''+\alpha_,)+M_,\cos.\alpha_,\text{sen.}(\alpha''-\alpha')\gtreqless 0,$$

que es la misma que la condicion (8), cambiados los signos: luego estas dos condiciones no pueden verificarse simultaneamente, como lo exije la cuestion, mientras no se tome en ambas el signo = de abajo: y de consiguiente ó no existir la friccion seria imposible dar á las bovedas otro estado mas permanente que el del perfecto equilibrio ~~[illegible]~~. Este resultado prueva la incompativilidad que hay de conseguir lo que pretende M. Bouguer en su Memoria del año 1734, cuyo objeto se reduce á averiguar las curbas mas aptas que deben formar las medias naranjas para que sus dobelas tengan, prescindiendo del rozamiento, una estavilidad capaz de resistir á otros esfuerzos extraños, ademas de los puramente dimanados de su mutuo empuje. La razon por que M. Bouger no se encuentra con este inconveniente al desenvolver sus calculos, proviene de suponer el trozo superior de los dos que considera, haciendo ~~solamente~~ veces de potencia, y el inferior de resistencia; siendo asi que debia igualmente discutir el caso contrario, lo que nosotros hemos venido á hacer cuando en la condicion segunda de este número pusimos respectivamente M'', $-M'$ y $M_,$ en lugar de M', $M_,$ y $M_{,,}$. Es verdad que este autor advierte al principio de su memoria que en las bovedas de media-naranja no puede verificarse hacia el centro del arco el movim.^to

de traslacion del trozo inferior, en atencion á la convergencia que tienen los planos de sus dos lechos verticales, los cuales no son paralelos entre si como en las bovedas de cañon seguido, sino que parten todos del exe de rebolucion. Pero esta razon no es suficiente para suponer del todo imposible dicho movimiento, por que realmente el obstaculo que un trozo cualquiera encuentra en una media naranja cerrada para moverse acercandose hacia el exe, ó sea vertical que pasa por el centro del arco, subsiste solo en el concepto de estar las juntas formadas por los planos verticales que salen del exe, perfectamente ajustadas unas con otras, y de ser verdaderamente impenetrable la materia de que se forman; y bien se vé que el mortero interpuesto entre ellas, facil de ceder á presiones muy cortas si no ha llegado á su debida consistencia, y la poca longitud ó cola que regularmente tienen las dovelas en esta especie de bovedas, son dos elementos muy poco ó nada aproposito para que se verifiquen rigorosamente tales condiciones. Asi es q.e el modo de considerar las medias-naranjas segun establecimos en el num.o 2, esto es, cada seccion suya como independiente y separada de las otras, ademas de ser el mas sencillo, tiene en su apoyo todo lo que acabamos de decir, y produce ventajas reales á la solidez, por que supone y examina las medias-naranjas en el estado de su mayor debilidad posible.

17 Para saver de que propiedad deben gozar las bovedas, á fin de que no se vengan abajo, suponiendo nulo el rozamiento segun se ha hecho en el numero anterior, transformaremos la equacion (8) en esta otra.

$$\frac{sen.\alpha'}{sen.(\alpha''-\alpha')}\{M''cot.\alpha''-M'cot.\alpha'\}+\frac{sen.\alpha_{,}}{sen.(\alpha''+\alpha_{,})}\{M''cot.\alpha''-M_{,}cot.\alpha_{,}\}=0, \text{------} (9)$$

siguiendo el mismo proceder empleado en el n.o 15. para dar á la condicion (A) la forma (7); y de este modo vemos claramente que devi-

-endo verificarse la equacion (9) bajo los infinitos valores que pueden tener las variables α'', α' y α_1, enteramente independientes unos de otros, será necesario hacer para que así suceda, $M''\cot.\alpha'' = M'\cot.\alpha' = M_1\cot.\alpha_1 =$ constante: esto es, tener en todas las juntas de lecho la equacion,

$$M = A\tang.\alpha, \text{------} (10)$$

siendo A una constante en toda la extension de la boveda, M un trozo qualquiera contado desde la clave, y α el angulo que su junta inferior de lecho forma con la vertical. Esta equacion se halla vajo diferentes formas en casi todas las Obras que tratan del empuje de bovedas, y parece que el objeto principal de sus Autores no ha sido otro que el darla á conocer, como si en ella solo estribara todo el fundamento de la teórica, siendo así que es la mas inutil por las razones que vamos á dar. Primero, por que aunque es verdad que satisfecha la equacion (10) quedan impedidos todos los movimientos puros de traslacion, qualquiera que sea la magnitud del rozamiento; no por eso se logra que las bovedas dexen de adquirir otros de distinta especie, como sucede á la boveda adintelada que es una de las mas expuestas á venirse abajo tomando el movimiento mixto de primera especie, conforme veremos en el capitulo tercero, no obstante de cumplir con la equacion (10) en toda la extension de sus juntas. Segundo, por que aun dado caso que con impedir el movimiento puro de traslacion de la manera que prescribe la equacion (10), quedarán de hecho sofocados todos los demas, nos veriamos imposivilitados de hacerla cumplir en toda la extension del arco, quando las juntas del arranque fueran horizontales, pues entonces la superficie de la boveda debia ser infinita siendolo la tangente del

angulo recto. Tercero y ultimo, por que el querer hacer que la magnitud de los trozos siga la razon de las tangentes de los angulos de sus juntas, quita la facultad que hay de poder disponer aun mismo tiempo de las dos curbas intrados y extrados: circunstancia que, atendida la trascendencia que puede tener en la practica, es por si sola suficiente para resolvernos, á no emplear jamas semejante equacion. Sin embargo de lo dicho, haremos una aplicacion de ella; y esto tan solo por que nos dará á conocer anticipadamente dos curbas de propiedades muy apreciables por lo que diremos en el Capitulo segundo.

18. Supongamos que siendo todas las dovelas de un grueso igual é infinitamente pequeño, y las juntas de lecho perpendiculares á la curba interior, se quiere averiguar la naturaleza de esta Curba para que el arco satisfaga en todos sus puntos á la equacion (50). Para esto se substituirá $\frac{\partial y}{\partial x}$ por tangente de α, y $K\int(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}$ ó $K\int y(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}$ por M, segun que la boveda sea de cañon seguido ó media-naranja, (veanse n. 2); y tendremos en estos dos casos

$$A\frac{\partial x}{\partial y}=\int(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tfrac{1}{2}A\frac{\partial x}{\partial y}=\int y(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}};$$

y diferenciando en el supuesto de ser constante ∂y,

$$\partial y=\frac{A\partial^2 x}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}}, \quad 2y\partial y=\frac{A\partial^2 x}{\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}};$$

cuyas integrales, ya completas, son

$$y=A\,Log.\left(\frac{\partial x}{\partial y}+\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}}\right), \quad y^2=A\,Log.\left(\frac{\partial x}{\partial y}+\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}}\right);$$

y de aqui, llamando e la vase de los logaritmos hyperbolicos, se saca

$$\partial x=\tfrac{1}{2}\partial y\,e^{y:A}-\tfrac{1}{2}\partial y\,e^{-y:A}, \quad \partial x=\tfrac{1}{2}\partial y\,e^{yy:A}-\tfrac{1}{2}\partial y\,e^{-yy:A}.$$

Integradas segunda vez, la primera nos da completada

$$A+x=\tfrac{1}{2}Ae^{y:A}+\tfrac{1}{2}Ae^{-y:A}, \quad ó \quad y=A\,Log.\left(\frac{A+x+\sqrt{2Ax+x^2}}{A}\right);$$

y la segunda, reducida á serie

$$x = \frac{y^3}{1.3A} + \frac{y^7}{1.2.3.7.A^3} + \frac{y^{11}}{1.2.3.4.5.11.A^5} + \&c.$$

Es facil conocer, aplicando los principios de la maquina funicular, que la primera de las dos ultimas equaciones corresponde á la curba que resulta de suspender por sus extremos á una cuerda uniforme~~mente gruesa~~ é infinitamente delgada y flexible, y que la segunda equacion se refiere á la curba que debe tomar un lienzo tambien infinitamente delgado y flexible, ~~acompañado de las mismas circuns-~~ pero de una anchura tal, que desde los extremos vaya disminuyendo hasta el medio, ~~tancias que la cuerda, á excepcion de suponer en lugar de la uniformi-~~ y su proyeccion horizontal esté representada por ~~dad en la anchura, que su proyeccion horizontal sea~~ dos rectas que formando un angulo infinitamente pequeño, se crucen en el punto que corresponde verticalmente al vertice ó punto mas bajo del lienzo. Por esta razon llamaremos en adelante á la curba primera, catenaria plana ó de cañon seguido, y á la segunda curba, catenaria de rebolucion ó de media naranja.

19. Si la condicion general (A) se refiere á bovedas simetricas, se podrá hacer $M_, = M'$ al mismo tiempo que $\alpha_, = \alpha'$, ó $M' = -M''$ y de consiguiente $\alpha' = -\alpha''$ En el primer caso la condicion (A) se convierte en:

$$M''\cos.(\alpha''-f)\,sen.(\alpha'+f) - M'\cos.(\alpha'+f)\,sen.(\alpha''-f) \gtreqless 0,$$

debiendo ser los valores que se substituyan por M'' mayores que los de M'.

En el segundo caso, la misma condicion (A) toma la forma:

$$M''\cos.(\alpha''-f)\,sen.(\alpha_,+f) - M_,\cos.(\alpha_,+f)\,sen.(\alpha''-f) \gtreqless 0,$$

en la cual han de ser los valores de M'' menores que los de $M_,$.

Observando ahora que esta condicion resulta identica á la otra con solo variar las letras $M_,$ y $\alpha_,$ en M' y α', es claro quedará lo mismo tener las dos condiciones que una sola, con tal que en

esta ultima suposicion los valores de M'' no tengan ya la sujecion de antes, esto es, pueda hacerse indistintamente M'' mayor ó menor que M'; y por lo tanto consideraremos solo para ambos casos la condicion primera que dividida por sen. $(\alpha'+f)$ y sen. $(\alpha''-f)$, á fin de separarse unas de otras las variables independientes, se reduce à:

$$M''\cot.(\alpha''-f) - M'\cot.(\alpha'+f) \geqq 0 : \text{-------} (13)$$

donde se vé que la boveda satisfará en todas sus juntas á esta condicion, si el minimo de $M''\cot.(\alpha''-f)$ es mayor que el maximo de $M'\cot.(\alpha'+f)$. Sentado esto, trasformemos la condicion general (A) en las tres formas:

$$b'\text{tang}(\alpha'+f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M'\cot.(\alpha'+f)\}+c'\text{tang}.(\alpha_{,}+f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\}\geqq 0,$$

$$a'\text{tang}.(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M'\cot.(\alpha'+f)\}+c'\text{tang}.(\alpha_{,}+f)\{M'\cot.(\alpha'+f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\}\geqq 0,$$

$$a'\text{tang}.(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\}+b'\text{tang}.(\alpha'+f)\{M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)-M'\cot.(\alpha'+f)\}\geqq 0,$$

sacando succesivamente de la equacion (6) una de las cantidades a', b' y c' en funciones de las otras dos, y subtituyendola despues en la referida condicion. Si hacemos ver que todas las expresiones incluidas dentro de los corchetes, son funciones semejantes al primer miembro de la condicion (B), concluiremos que verificada esta en los terminos que dejamos dicho, deve indispensablemente de ser cierta la general (A), cualesquiera que sean los valores de M'', M' y $M_{,}$, siempre que nos refiriamos á una boveda simetrica. Inferiremos esto facilmente por medio de la trasformacion primera, cuando los tres trozos M'', M' y $M_{,}$ son positivos, esto es, cuando su posicion con respecto á la clave es la misma que tienen en la figura 1.ª: por la transformacion segunda, en el caso de ser los dos primeros positivos y el tercero negativo, ó bien este positivo y los otros dos negativos: por la tranformacion ultima, siempre que el primero sea positivo, el segundo negativo y el tercero positivo; y estas son todas las diferentes variedades que pueden ocurrir con relacion á los signos ó situacion de los trozos M'', M' y $M_{,}$. Ademas, al hacer en la condicion general $M'=M_{,}$ en un caso, y $M'=-M_{,}$ en otro, suponemos que la boveda se abre por tres trozos situados

simetricamente con respecto á la clave, segun representamos en las Fig.s 10.ª y 11.ª, de las cuales la primera se refiere al caso en que el trozo del medio hace subir á los dos laterales resvalando por los planos inclinados de sus juntas de lecho, y la segunda cuando estos se mueven en direccion contraria empujando al del medio para que resvale de abajo arriba. La razon es clara, porque en la Fig.ª 10.ª siendo $M' = M_1$, el trozo $M'N_1$ queda dividido en dos partes iguales por la clave, y es evidente que si este trozo puede empujar al inferior $M'N''$, tambien podrá hacer otro tanto contra el trozo $M_1 N_{11}$ siempre que este sea igual en magnitud y posicion al trozo $M'N''$: del mismo modo se prueba que el movimiento representado por la Fig.ª 11.ª, se considera haciendo en la condicion (A) $M' = -M''$, lo cual equivale á suponer el trozo $M''N'$ de la Fig.ª 1.ª dividido en dos mitades por la clave. Resulta, pues, de todo lo dicho en este numero, que si una boveda simetrica no puede venirse abajo con el movimiento puro de traslacion abriendose por cuatro juntas, dos de ellas situadas al lado derecho de la clave y de la misma forma que las otras dos al izquierdo, tampoco lo podrá adquirir abriendose por otro numero cualquiera de juntas y situadas de diferente manera: luego para evitar todos los movimientos de traslacion en una boveda simetrica, basta solo tener presente la condicion (B). Si esta no se verifica siendo M'' mayor que M', el arco tomará el movimiento espresado en la Fig.ª 1.ª, y el representado por la Fig.ª 11.ª siendo M'' menor que M'.

20. Tratemos ya de aplicar la condicion (B) á una boveda de medio punto, y cuyas dovelas sean todas de la misma longitud, y supongamos que se quiere averiguar el menor valor que puede tener la friccion, á fin de que esta boveda se mantenga sin adquirir el movimiento puro de traslacion. Para esto hallaremos el minimo de $(rK+\frac{1}{2}K^2)\alpha''\cot.(\alpha''-f)$, y el maximo de $(rK+\frac{1}{2}K^2)\alpha'\cot.(\alpha'+f)$, que son las espresiones equivalentes á $M''\cot.(\alpha''-f)$ y $M'\cot.(\alpha'+f)$, llamando r el radio del circulo interior. En cuanto al minimo de $(rK+\frac{1}{2}K^2)\alpha''\cot.(\alpha''-f)$

será escusado hallarlo teoricamente, por que la expresion $\alpha'' cot.(\alpha''-f)$ disminuye sin interrupcion desde $\alpha''=0$ hasta $\alpha''=90°$ que son sus dos limites (veanse los dos num.^s 11 y 13): por consiguiente se tendrá en este caso minimo de $M'' cot.(\alpha''-f) = \pi(2K+\frac{1}{2}K^2) tang.f$, si por π expresamos la relacion de un cuadrante de circulo con su radio. El maximo de $M' cot.(\alpha'+f)$ dá la ecuacion $d\{\alpha' cot.(\alpha'+f)\}=0$, ó bien $\alpha' = cos.(\alpha'+f) sen.(\alpha'+f)$, y el objeto de la cuestion esta otra $\pi tang.f - \alpha' cot.(\alpha'+f) = 0$: de la convinacion de estas dos sacamos $cos.(\alpha'+f) = \sqrt{\pi tang.f}$, $\sqrt{(1-\pi tang.f)\pi tang.f} = \alpha'$, ó $\sqrt{(1-\pi tang.f)\pi tang.f} + f = \alpha'+f$, y pasando de los angulos á la expresion de sus cosenos, tendremos la final

$$cos.(\alpha'+f) = \sqrt{\pi tang.f} = cos.\left(f+\sqrt{(1-\pi tang.f)\pi tang.f}\right):$$

de donde, si se emplea el metodo de tanteos para determinar $tang.f$, hallaremos ser con corta diferiencia $tang.f = 0.31$, aproximada por exceso. Asi, pues, siempre que el rozamiento sea mayor que 0.31 de la presion, como en efecto lo es en la mayor parte de casos, no habrá que tener el menor recelo de que las bovedas de medio punto y dovelas iguales se vengan abajo, adquiriendo el movimiento puro de traslacion.

21.: De lo expuesto en el num.^l 16. se infiere que el movimiento de traslacion seria imposible de evitar si no fuera por la friccion; y esto nos ~~[illegible]~~ muestra que devemos caminar con mucho cuidado cuando por ciertas circunstancias particulares se sepa ó presuma que el rozamiento no ha de producir su efecto, como sucede en un corto intervalo de tiempo que empieza á contarse desde el instante que los arcos recien acabados de construir se ven enteramente libres de la cimbra, sin haber dado lugar á que la mezcla interpuesta entre las juntas de las dovelas tome la devida consistencia. Si la causa principal del rozamiento dimana de la resistencia que oponen al romperse las escabrosidades de los cuerpos sobre cuyas superficies se efectua el movimiento, no admite duda que en el caso propuesto de hallar-

-se el arco sin cimbra y el mortero en un estado de blandura capaz de ceder á presiones muy cortas, las dobelas deben obedecer libremente, sin hacerse sentir el rozamiento, á las dos fuerzas perpendicular y paralela á las respectivas juntas inferiores de lecho, en que puede descomponerse la resultante de todas las fuerzas que solicitan á cada dovela en particular: la primera de estas componentes se empleará solamente á los principios en aproximar los lechos unos con otros, haciendo desalojar el mortero que los separa, resultando de aqui una contraccion en la longitud del arco, tanto mas sensible cuanto mayor fuere el numero de lechos de que consta; y la segunda componente conseguirá hacer resvalar á las dovelas en direccion de sus juntas hacia el centro del arco ó en sentido contrario, segun el signo que acompañe á esta fuerza. Pero llegado el caso de que las juntas esten ya tocandose unas con otras todo lo posible, desde este mismo instante comienza la primera fuerza á exercer solamente el oficio de presion, y por lo tanto el rozamiento á producir su efecto sofocando el movimiento originado por la segunda fuerza. De resultar del movimiento de las dovelas á lo largo de sus juntas puede aparecer desfigurada algun tanto la curbatura del intrados, ó tal vez originarse la ruina total del arco, si no se toman las debidas precauciones para impedir que las dovelas adquieran una velocidad sensible que ya no pueda ser enteramente destruida por el rozamiento desde luego que este empieza á tener lugar. El metodo directo de evitar enteramente los efectos de este movimiento, seria hacer que la boveda satisfaciera en todos sus puntos á la equacion (10); pero con semejante proceder, ademas de los incovenientes advertidos en el num.º 17, resultaria otro de no menor consideracion, pues tendriamos ~~[illegible]~~ quedar á las bovedas una figura determinada y para siempre, por solo remediar

~~[illegible]~~

~~han de permanecer, por lo menos~~ un mal de corta duracion: asi es que para tales casos nos queda otro arbitrio que quitar las cimbras de la forma prescrita por M. Perronet en la memoria que dió con el mismo objeto en 1773. á la Academia de ciencias de Paris, la cual se halla tambien en el suplemento á sus obras.

22. Uno de los puestos en que se vió obligado este autor á quitar las cimbras antes de secarse el mortero, y el que dió á conocer con mayor claridad los dos diferentes movimientos de las dovelas, fue el Puente de St. Edme de Nogent, cuya montea era de 26. pies, la luz de 90. y la clave de 5. Quitada la cimbra en este puente, las lineas de y ea, que antes de esta operacion se habian tirado rectas, segun se vé en la Fig.^a 8, aparecieron despues transformadas en curbas como lo representa la Fig.^a 9, la segunda linea con un punto f. de infexion situado en la dovela decima septima, y la montea diminuida cerca de pie y medio á causa de la contraccion padecida por el arco. Esta observacion nos prueva claramente que las dobelas superiores al punto f se vieron obligadas á vajar resvalando por sus respectivas juntas de lecho, y las inferiores á subir con igual movimiento, apareciendo unicamente inmovil la dobela que coincide con el punto f: por consiguiente si queremos averiguar analiticamente la posicion del punto f, esto es de la dovela que se mantubo en equilibrio durante el movimiento de las demas, no habra mas que igualar á cero el primer miembro de la condicion (B), haciendo

$\text{tang.} f = 0$, $M'' = M' + dM'$ y $\alpha'' = \alpha' + d\alpha'$, con lo cual la equacion

$$d(M' \cot.\alpha') = 0 \text{-----} (11)$$

que resulta con estas substituciones, nos dará á conocer dicha posicion. Para aplicar esta equacion al puente mencionado, hemos de advertir que el valor de $M' \cot.\alpha'$, expresado en funciones de la abcisa x' correspondiente á un punto M cualquiera del intrados, presenta algunas dificultades á causa de no ser este una curba formada por ninguna Ley de continuidad, sino por diferentes arcos de

circulo: y asi no tenemos medio mas sencillo que igualarla á la funcion $A+Bx'+Cx'x'$; haciendo que los coeficientes A, B y C. satisfagan á tres puntos principales cuales son, el empice del arco, el punto en que la normal del intrados forma el angulo de 45.º con la vertical y el horizonte, y el nacimiento ó arranque del arco. Llamando, pues, m la montea del arco, l su semi-luz, y k la altura de la clave según [redacted] costumbre; $M'cot.\alpha'$ será en el empice del arco $=\frac{kl^2}{m}+\frac{1}{2}k^2=402$, si suponemos que en dicho punto se confunde la curbatura del intrados con una elipse cuyos semiexes mayor y menor son l y m: referida la misma cantidad $M'cot.\alpha'$ al angulo $\alpha'=45.^o$ y suponiendo ~~sin error sensible~~ en este caso que $y'=\frac{l^2}{\sqrt{l^2+m^2}}=39$ pies, $x'=m-\frac{m^2}{\sqrt{l^2+m^2}}=13$, como si el intrados fuera realmente una elipse, sale $M'cot.\alpha'=M'=\frac{1}{2}(k+x)^2$ $+y'(k+\frac{1}{2}x')=493$, considerada parabolica la superficie A M P comprendida entre la ordenada y la curba intrados: finalmente, haciendo $\alpha'=90.^o$, ó $m=x'$, resulta $M'cot.\alpha'=0$. Substituidos estos tres valores en la espresion que hemos hecho equivalente á $M'cot.\alpha'$, tendremos $A=402$, $B=29.5$ y $C=-1.73$, y la equacion (11) nos dará por ultimo

$$x'=-\frac{B}{2C}=8.5 \text{ pies.}$$

Si trazamos graficamente el arco interior con once centros, de la manera que ~~segun~~ manifiesta en sus obras M Perronet, y tomamos por abcisa la cantidad **AP** = 8.5 pies, veremos que corresponde á un punto de la curba que caé justamente entre el espacio que ocupan las dos juntas de lecho de la dovela decima septima. M. Perronet, á fin de confirmar teoricamente sus observaciones, se vale para el puente de St. Edme de Nogent de un resultado deducido por M. Couplet en el problema que resuelve (veanse las memorias de ciencias de Paris año de 1729) con el objeto de hallar el peso que sostiene una cimbra antes de poner la clave, y para el Puente de Neuilli emplea la hipotesis que admite M. Lahire (veanse las mismas, año de 1712) con la mira de determinar la junta de rotura que se manifiesta en un arco ~~el angulo llamado de rotura~~ que se verifique abajo de resultas de no tener los estrivos la suficiente solidez; pero tanto la hipotesis de este ultimo autor, como el resultado de M. Couplet se refieren á dos cuestiones bien diferentes de la que acaba de ocuparnos.

Capitulo segundo.

De las condiciones que impiden los movimientos puros.

De rotacion

23. Sean $N''M'$, $M'N_{,}$ y $N_{,}M_{,,}$ los tres trozos que entran á producir el movimiento puro de rotacion (Fig.ª 2.ª), y descompongamos el peso $M'+M_{,}$ del trozo $M'N_{,}$, desde un punto φ indeterminado de la vertical que pasa por su centro de inercia, en dos fuerzas F' y $F_{,}$ que formen con la misma linea los angulos λ' y $\lambda_{,}$. Para concebir con esta descomposicion el movimiento de los tres trozos alrededor de los puntos N'', M', $N_{,}$ y $M_{,,}$ se necesita: 1.º que la componente F' pase por abajo del punto M', á fin de que la junta $M'N'$ se abra por el extrados: 2.º que $F_{,}$ pase por encima de $N_{,}$ para que la junta $M_{,}N_{,}$ se abra por el intrados: 3.º que el momento de $F_{,}$ con respecto al punto $M_{,,}$ sea menor que el del trozo $M_{,,}N_{,}$ con relacion al mismo punto $M_{,,}$: 4.º y ultimo que el momento de F' sea mayor que el del trozo $M'N''$, referidos ambos momentos al punto N''. Como las condiciones que acabamos de establecer son cuatro, y tres las variables ó indeterminadas que contienen, á saber, la situacion del punto φ y los angulos λ' y $\lambda_{,}$; daremos á estas cantidades, de todos los valores que satisfacen á las tres primeras condiciones, aquellos que sean mas propios para que se verifique mejor la cuarta. Suponiendo el punto φ inmovil, y constante el angulo $\lambda_{,}$, el momento de F' tomado en el punto N'' crece á medida que λ' aumenta: luego la fuerza F' debe pasar por M', una vez que el angulo $f\varphi M'$ es el mayor valor que puede tener λ' á causa de la condicion primera. Si supuesta en efecto la fuerza F' aplicada en M', consideramos que el punto φ baja verticalmente de resultar de moverse paralelamente á si misma la otra fuerza $F_{,}$; se

advertirá tambien que el momento de F_1 referido al mismo punto N'' vá sucesivamente aumentando de valor; pero como el punto P no puede bajar mas de lo que le permite la fuerza F_1 que en virtud de la segunda condicion ha de pasar por encima del punto N_1, se infiere de aqui que esta segunda fuerza deve igualmente suponerse aplicada á su respectivo punto N_1. Finalmente, observando que los momentos de las componentes F' y F_1, aplicadas ya á los puntos M' y N_1, y tomados aquellos respectivamente en los puntos N'' y M_{11}, aumentan al paso que es mas abierto el angulo MPN, formado por dichas fuerzas, y que la condicion tercera obliga á que el segundo momento sea menor que el del trozo $M_{11}N_1$; concluiremos por fin diciendo que las componentes del trozo $M'N_1$ deven, no solo dirijirse respectivamente á los puntos M' y N_1, sino tambien tirarse desde un punto P tal, que los momentos de F_1 y del trozo $M_{11}N_1$, referidos al punto M_{11}, resulten iguales.

24. Sentado esto, convengamos en espresar por $Mom''.F'$, $Mom_1.F'$ y $Mom_{11}.F'$, los momentos de F' tomados respectivamente en los puntos N'', N_1 y M_{11}, del mismo modo que por $Mom_{11}.F_1$, $Mom'.F_1$ y $Mom''.F_1$ los de la fuerza F_1 referidos á los puntos M_{11}, M' y N'': tambien expresemos, siguiendo la misma analogia, por $Mom''.(m''-m')$, $Mom'.(m'+m_1)$, $Mom_{11}.(m_{11}-m_1)$, $Mom_1.(m_1+m')$ los de los trozos $N''M'=m''-m'$, $M'N_1=m'+m_1$, $M_{11}N_1=m_{11}-m_1$, $N_1M'=m_1+m'$, con respecto á sus puntos de apoyo N'', M', M_{11}, N_1; y se tendrá

$$Mom''.F'=F'.\{(z''-x')\,sen.\lambda'-(u''-y')\cos.\lambda'\},$$

$$Mom_{11}.F'=F'.\{(x_{11}-x')\,sen.\lambda'+(y_{11}+y')\cos.\lambda'\},$$

$$Mom_1.F'=F'.\{(z_1-x')\,sen.\lambda'+(u_1+y')\cos.\lambda'\}.$$

Por ser F' y F_1 componentes de $M'+M_1$ dirijidas á los puntos M' y N_1, sale $Mom_1.F'=Mom_1.(m_1+m')$, y esta cantidad substituida en la ecuacion ultima dá $F'=$ ......
$\dfrac{Mom_1.(m_1+m')}{(z_1-x')\,sen.\lambda'+(u_1+y')\cos.\lambda'}$, con lo cual las dos primeras se trasforman en:

$$Mom.''\,F' = \left\{\frac{(z''-x')\tang.\lambda' - (u''-y')}{(z_{1}-x')\tang.\lambda' + (u_{1}+y')}\right\}.\,Mom._{1}.(M'+M_{1}),$$

pero por lo dicho al fin del num.º 23, y ser $M'+M_{1}$ resultante de F' y F_{1} se tiene $Mom_{''}.F_{1}$

$= Mom_{''}.(M_{''}-M_{1}) = Mom_{''}.F' - Mom_{''}.(M_{1}+M')$, esto es, $Mom_{''}.F' = Mom_{''}.(M_{''}+M')$:

igualando esta ultima espresion de $Mom_{''}.F'$ con la anterior, y despejando $\tang.\lambda'$, sacaremos.

$$\tang.\lambda' = \frac{(u_{1}+y')Mom_{''}.(M_{''}+M') - (y_{''}+y')Mom_{1}.(M_{1}+M')}{(x_{''}-x')Mom_{1}.(M_{1}+M') - (z_{1}-x')Mom_{''}.(M_{''}+M')}, \text{------} (1)$$

y de consiguiente:

$$Mom.''\,F' = \frac{\{(z''-x')(u_{1}+y') + (z_{1}-x')(u''-y')\}Mom_{''}.(M_{''}+M') - \{(z''-x')(y_{''}+y') + (x_{''}-x')(u''-y')\}Mom_{1}.(M_{1}+M')}{(x_{''}-x')(u_{1}+y') + (x'-z_{1})(y_{''}+y')}.$$

Asi, pues, el movimiento en cuestión de los tres trozos no podrá verificarse, mientras sea

$$Mom.''(M''-M') - \frac{\{(z''-x')(u_{1}+y') + (z_{1}-x')(u''-y')\}Mom_{''}.(M_{''}+M') - \{(z''-x')(y_{''}+y') + (x_{''}-x')(u''-y')\}Mom_{1}.(M_{1}+M')}{(x_{''}-x')(u_{1}+y') + (x'-z_{1})(y_{''}+y')} \geqq 0 \ldots (2)$$

condicion que multiplicada por $(x_{''}-x')(u_{1}+y') + (x'-z_{1})(y_{''}+y')$, y teniendo presente que

$Mom.''(M''-M') = M''Z'' - M'X' - M'(u''+y)$, $Mom_{''}.(M_{''}+M') = M_{''}X_{''} - M'X' + M'(y_{''}+y')$,

$Mom_{1}.(M_{1}+M') = M_{1}Z_{1} - M'X' + M'(u_{1}+y')$, queda convertida en:

$$a''M''Z'' - b''M'X' + c''M_{1}Z_{1} - d''M_{''}X_{''} \geqq 0, \text{---------} (C)$$

bajo el concepto de ser

$$a'' = (x_{''}-x')(u_{1}+y') + (x'-z_{1})(y_{''}+y');$$

$$b'' = (z''-z_{1})(y_{''}-u_{1}) + (x_{''}-z_{1})(u''+u_{1}) = a''+c''-d'',$$

$$c'' = (z''-x')(y_{''}+y') + (x_{''}-x')(u''-y'),$$

$$d'' = (z''-x')(u_{1}+y') + (z_{1}-x')(u''-y').$$

25. Por las mismas operaciones hechas para reducir el coeficiente de $M'X'$ á la cantidad llamada b'', se viene en conocimiento de ser $a''-b''+c''-d''=0$; y es facil conocer tambien que $a''z''-b''x'+c''z_{1}-d''x_{''}=0$, por que poniendo por b'' su igual $a''+c''-d''$, la cantidad $a''z''-b''x'+c''z_{1}-d''x_{''}$ se convierte en $a''(z''-x')+c''(z_{1}-x')-d''(x_{''}-x')$ que aparece

igual con cero, substituyendo por a'', c'' y d'' sus valores en funciones de las coordenadas. ~~[illegible]~~

En esta inteligencia, si de las equaciones

$$\left.\begin{array}{l} a''-b''+c''-d''=0, \\ a''z''-b''x'+c''z_{,}-d''x_{,,}=0, \end{array}\right\} \text{-----} (3)$$

despejamos a'' y b'', y se substituyen en la condicion general (C) quedará transformada despues de dividir todos sus terminos por $c''\,d''$, en

$$\frac{(x'-z_{,})}{d''}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-\frac{M'X'-M_{,}Z_{,}}{x'-z_{,}}\right\}+\frac{(x_{,,}-x')}{c''}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-\frac{M_{,,}X_{,,}-M'X'}{x_{,,}-x'}\right\}\geqq 0 \text{---} (4)$$

que puede servir para examinar si la boveda es ó no capaz de adquirir el movimiento puro de rotacion, empleando un metodo parecido al que dimos en el n.º 13. para el movimiento de traslacion. La condicion (C) es aún todavia mucho mas complicada que la general (A), tratando de averiguar directamente el minimo de su primer termino con respecto á las variables M'', M', $M_{,}$, $M_{,,}$; y aunque puesta en la forma que acabamos de darla, aparecen las cantidades $M_{,,}$ y $M_{,}$, igualmente que sus dependientes, separadas unas de otras, y solo mezcladas con M'' y M', es sin embargo la transformacion mas acomodada que puede conseguirse á fin de hallar la situacion de los trozos que producen el mayor empuje, al menos cuando la boveda no es simetrica. Haciendo pues, bajo este supuesto M'' al trozo contado desde la clave hasta uno de los arranques, los dos terminos de la condicion (4) quedan siendo funciones, el primero de M' y $M_{,}$, y el segundo de M' y $M_{,,}$: luego si despues damos al trozo M' un valor determinado, el primer termino aparecerá funcion solamente de $M_{,}$ y el segundo de $M_{,,}$; y podremos con facilidad hallar el minimo de cada uno de ellos, segun las diferentes substituciones que se vayan haciendo en M'. Si la suma de estos minimos resulta siempre positiva, bajo todos los diferentes valores de M', ya se cuenten los trozos M'', M', $M_{,}$ y $M_{,,}$ de derecha á izquierda como se representa en la fig.ª 2.ª, ó ya de izquierda á derecha, en este caso estamos seguros que la boveda no podrá de ninguna manera adquirir el movimiento puro de rotacion.

26. Para tener la condicion primitiva (2) bajo la forma (4), la hemos multiplicado por d'', y dividido por $c''\,d''$; y segun lo advertido en el n.º 12, es necesario á fin de poder efectuar estas opera-

—ciones, que las cantidades a'', b'', c'' y d'' sean positivas: por lo tanto nos resta ahora provar que dichas cantidades deven solamente considerarse bajo esta accepcion, desechando los casos en que cualquiera de ellas resulte negativa. En efecto será excusado, para ver si los trozos $N''M'$, $M'N_1$ y N_1M_{11} pueden adquirir (Fig.ª 2ª) el movimiento puro de rotacion, tomar los puntos N'', M' y N_1 tales que el angulo $N''M'N_1$ sea mayor que dos rectos, por que en este caso la fuerza F que se dirije á hacer voltear al trozo $N''M'$ por el punto N'', pasando su direccion entre el punto N'' y el centro del arco, se hallará incapaz de producir tal efecto: suponiendo, pues, segun lo acabado de decir, que solo se toman aquellos puntos N'', M' y N_1 en que es $N''M'N_1 < 180°$, y teniendo presente que debe ser $M'N_1M_{11} < 180$ por lo manifestado en la condicion tercera del num.º 4, será facil inferir de aqui que las condiciones $N''N_1M_{11} < 180°$, y $N''M'M_{11} < 180$ son igualmente ciertas; y si de los angulos $M_{11}N_1M'$, $M_{11}N_1N''$, $M_{11}M'N''$ y $N_1M'N''$ pasamos á la espresion de sus senos en funciones de las coordenadas de los puntos M_{11}, N_1, M' y N'', resultarán por ultimo positivas las cantidades a'', b'', c'' y d''. Esta es la razon por que consideramos la condicion (2), lo mismo que sus derivadas, solo en el concepto de ser a'', b'', c'' y d'' positivas, esto es refiriendonos unicamente á los casos en que es incierta ó dudosa la exitencia de aquella condicion, y asi es como caminando bajo este supuesto, la podemos multiplicar ó dividir por cualquiera de las cantidades a'', b'', c'' y d'', sin alterar la relacion que existe entre sus dos miembros.

27. Por lo espuesto en el num.º proximo pasado, se deduce que siendo la espresion $d'' = (z'' - x')(u_1 + y') - (x' - z_1)(u'' - y')$ negativa bajo todas las posiciones de los puntos N_1, M' y N'' sin pasar de los arranques, puede la boveda sostener un peso cualquiera encima del estrados sin venirse abajo. La cantidad d'' no podrá menos de ser negativa, siempre que las tangentes $c_1m't'$ y $c'm_1t_1$ (Fig.ª 20) tiradas en la curba interior desde los puntos c_1 y c' del extrados que estan á plomo con los arranques C_1 y C', no corten en ningun otro punto á la curba exterior: por que la espresion d'' solo tiene el signo positivo cuando la prolongacion de la linea tirada por los puntos N_1

y M (Fig.ª 2ª) pasa por arriba del punto N''; pero esta linea, suponiendo variables los puntos N, y M', se desvia tanto mas hacia arriba del punto N'' cuanto mas se acerca á ser tangente del intrados, y cuanto el punto N, se aproxima mas al punto $M_{,,}$; y es de advertir que ni el punto $M_{,,}$ puede hallarse mas abajo del nacimiento del intrados, ni el punto N, de la comun interseccion de la curba exterior con la vertical que pasa por $M_{,,}$, pues el trozo $M_{,,}$ N, se hallaria de lo contrario imposivilitado de producir efecto contra los trozos N, M' y M' N''. Tampoco podrán los machones (Fig.ª 20) girar por los puntos T' y T, de sus vases, si las mismas tangentes e, m' t' y e' m, t, pasan por entre dichos puntos: por lo que siendo la boveda de medio punto, se necesita que el grueso de las dovelas sea lo menos igual al radio del circulo interior, y el de los machones igual al mismo radio mas la altura que estos tengan multiplicada por $\sqrt{3}$= 1.73616, á fin de que tanto las dovelas como los machones se hallen enteramente libres de tomar el movimiento de rotacion, cualesquiera que sean la posicion y magnitud del peso que cargue sobre la boveda.

28. En caso de referirse la condicion general (C) à bovedas de un espesor infinitamente pequeño, será permitido confundir las coordenadas del intrados con las del estrados, poniendo en vez de las letras Z, z, u, estas otras X, x, y, con los mismos acentos que tengan aquellas, y de consiguiente tendremos

$$a''M''X''-b''M'X'+c''M_{,}X_{,}-d''M_{,,}X_{,,}\geqq 0,$$

siendo para este caso $a''=(x_{,,}-x')(y_{,}+y')+(x'-x_{,})(y_{,,}+y')$, $b''=(x''-x_{,})(y_{,,}+y_{,})+(x_{,,}-x_{,})(y''+y_{,})$, $c''=(x''-x')(y_{,,}+y')+(x_{,,}-x')(y''-y')$, $d''=(x''-x')(y_{,}+y')-(x'-x_{,})(y''-y')$. Como esta condicion debe igualmente referirse al lado izquierdo de la clave, y con las mismas circunstancias que se concivieron en el derecho, es necesario que se verifique tambien poniendo $M_{,,}$, $M_{,}$, M' y M'' en lugar de M'', M', $M_{,}$ y $M_{,,}$; esto es, que se tenga al mismo tiempo esta otra condicion

$$(a'')M_{,,}X_{,,}-(b'')M_{,}X_{,}+(c'')M'X'-(d'')M''X''\geqq 0,$$

llamando (α''), (b''), &c. lo que se vuelven las cantidades a'', b'' &c. invirtiendo los acentos á las variables x'', x' y'', y' &c. Hecha esta operacion advertiremos ser $(a'')=d''$, $(b'')=c''$, $(c'')=b''$, $(d'')=a''$, con lo cual resultan iguales los primeros miembros de las dos condiciones ultimas, y de signos encontrados; y esto nos manifiesta que semejantes bovedas no podrán mantenerse á menos que no se las dé un estado de perfecto equilibrio. Satisfarán á este estado siempre que independientemente de la posicion de los trozos M'', M', $M_{,}$ y $M_{,,}$ se verifique la equacion

$$a''M''X''-b''M'X'+c''M_{,}X_{,}-d''M_{,,}X_{,,}=0,$$

la cual, haciendo las mismas operaciones que las executadas en la condicion general para darla la forma (4), se convierte en

$$\frac{c''}{x''-x'}\{M''X''(x'-x_{,})-M'X'(x''-x_{,})+M_{,}X_{,}(x''-x')\}+\frac{d''}{x''-x'}\{M''X''(x_{,,}-x')-M'X'(x_{,,}-x'')-M_{,,}X_{,,}(x''-x')\}\gtreqless 0,$$

y poniendo $\frac{x''}{x'}(x'-x_{,})+\frac{x_{,}}{x'}(x''-x')$ en lugar del coeficiente $(x''-x_{,})$ que tiene $M'X'$ en el primer corchete, y $\frac{x''}{x'}(x_{,,}-x')-\frac{x_{,,}}{x'}(x''-x')$ en lugar del coeficiente $(x_{,,}-x'')$ que tiene la misma cantidad en el segundo corchete, sera

$$\frac{c''x''(x'-x_{,})}{x''-x'}\left\{\frac{M''X''}{x''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+c''x_{,}\left\{\frac{M_{,}X_{,}}{x_{,}}-\frac{M'X'}{x'}\right\}+\frac{d''x''(x_{,,}-x')}{x''-x'}\left\{\frac{M''X''}{x''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}$$
$$+d''x_{,,}\left\{\frac{M'X'}{x'}-\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}\right\}=0:$$

con cuya trasformacion se hecha de ver facilmente que necesita ser en todos los puntos de la curba

$$\frac{MX}{x}=\text{constante}.$$

Si la boveda es de cañon seguido, se tiene $MX=\int\partial y\int(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}$, y si de media naranja sale $MX=\int\partial y\int y(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}$: substituidos estos valores de MX en la equacion ultima, y diferenciandola dos veces en el supuesto de ser ∂y constante despues de multiplicar por x sus miembros, tendremos dos equaciones iguales á las que dimos á conocer en el N.º 10: lo que nos prueva que las catenarias plana y de rebolucion son las unicas curvas que deven formar las

bovedas de cañon seguido y media naranja para que no se vengan abajo en el caso de ser su espesor infinitamente pequeño. Esta propiedad es la que hace verdaderamente recomendables á la practica las dos curbas acabadas de mencionar, y no el supuesto admitido en el N.º 18. del Capitulo Segundo, porque nunca se verifica ~~que dista mucho de poderse jamas verificar~~.

29. Consideremos ya el caso de ser simetricas las bovedas, y hagamos en la condicion (C) separadamente $M_{\prime\prime} = M'$, y $M'' = M_{\prime}$: cuyos dos supuestos dan.

$$M''Z''(x'-z_1) - M'X'(z''-z_1) + M_1Z_1(z''-x') \geqq 0 \text{ - - - - - - - - (D)}$$

$$-M_{11}X_{11}(z_1-x') + M_1Z_1(x_{11}-x') - M'X'(x_{11}-z_1) \geqq 0 \text{ - - - - - - - - (E)}$$

debiendo hacerse en la primera $M'' > M' > M_1$, y en la segunda $M_{11} > M_1 > M'$. Las condiciones (D) y (E) se refieren á impedir que las bovedas se abran por seis juntas situadas simetricamente con respecto á la clave, ya hundiendose la parte superior y elevandose los riñones, ó ya hundiendose estos y elevandose aquella: cuyas diferiencias estan representadas por la Fig.ª 12.ª y 13.ª Por que si los tres trozos $M_{11}N'$, N_1M' y $M''N''$ se abren por sus respectivas juntas de lecho, haciendo en la Fig.ª 12.ª $M_{11}B = M'B$, y en la Fig.ª 13.ª $N_1B = N''B$ con arreglo á los dos supuestos que han producido las condiciones (D) y (E), es claro que por ser simetrica la boveda deberan tambien manifestarse abiertos los trozos $M'n'$ y $M_{11}n_{11}$ de la figura primera y los trozos N_1m_1 y $N''m''$ de la segunda; siempre que cada uno de ellos sea igual al que tiene enfrente de si en su respectiva figura.

30. ¿Pero en una boveda simetrica, evitados los movimientos que se expresan en las Fig. 12.ª y 13.ª, mediante las condiciones (D) y (E), lo estarán igualmente todos los demas que pueden deducirse de hacer en la condicion general (C) otros distintos supuestos que los del numero anterior? Para hacer ver que esto sucede en efecto, vamos á demostrar que la condicion (C) referida á una boveda simetrica, es evidentemente cierta vajo todos los valores posibles de $M_{\prime}$, M'', M', $M_{\prime}$ y

$M_{''}$, siempre que lo sean las dos ultimas (D) y (E). con este fin hallemos primero las diferentes relaciones de desigualdad que pueden existir entre los trozos M'', M', $M_{'}$ y $M_{''}$, y expresemoslas por las permutaciones que admiten estas cuatro letras dando á entender, por exemplo, con la permutacion $M'' M_{''} M_{'} M'$ que el trozo $M_{'}$ es mayor que M' y menor que M'' y $M_{''}$, quiero decir, mayor que los que tiene despues de él, y menor que los que le anteceden. Asi convenidos, advertiremos que solo puede existir: 1º la permutacion $M'' M' M_{'} M_{''}$ cuando todos los trozos se hallan en el lado derecho de la clave: 2º las cuatro siguientes $M''M'M_{'}M_{''}$, $M''M'M_{''}M_{'}$, $M''M_{''}M'M_{'}$, $M_{''}M''M'M_{'}$ que resultan de los cuatro modos con que se puede intercalar $M_{''}$ en la permutacion de tres casas $M''M'M_{'}$, suponiendo que estos tres trozos se hallan en el lado derecho y el otro en el izquierdo: 3º las seis $M''M'M_{''}M_{'}$, $M''M_{''}M'M_{'}$, $M_{''}M''M'M_{'}$, $M''M_{''}M_{'}M'$, $M_{''}M''M_{'}M'$, $M_{''}M_{'}M''M'$, provenidas de combinar las cuatro letras de suerte que nunca se halle M' antes que M'', ni $M_{'}$ antes que $M_{''}$, á causa de considerar los dos primeros trozos en el lado derecho de la clave y los otros dos en el izquierdo: 4º las cuatro $M_{''}M_{'}M'M''$, $M_{''}M_{'}M''M'$, $M_{''}M''M_{'}M'$, $M''M_{''}M_{'}M'$, refiriendonos al caso de estar solo en el lado derecho el trozo M'', y los tres restantes en el izquierdo: 5º y ultimo, la permutacion $M_{''}M_{'}M'M''$ cuando se supone que todos los cuatro se hallan en el lado izquierdo de la clave. Si reunimos todas estas permutaciones, desechando las que esten anteriormte. consideradas, encontraremos que las ocho siguientes:

$M''M_{''}M_{'}M'$, $M_{''}M''M_{'}M'$, $M_{''}M_{'}M''M'$, $M''M_{''}M'M_{'}$,

$M''M'M_{''}M_{'}$, $M_{''}M''M'M_{'}$, $M_{''}M_{'}M'M''$, $M''M'M_{'}M_{''}$,

expresan todas las relaciones de desigualdad que pueden existir entre los trozos M'', M', $M_{'}$ y $M_{''}$.

31. Esto supuesto: de las equaciones (3) eliminemos dos de las cuatro letras a'' b'' c'' y d'' en funciones de las otras dos, y hecha la substitucion en la condicion (C) podrá esta trasformarse bajo las cinco formas que siguen:

$$\frac{a''}{x_{\prime\prime}-z_{\prime}}\left\{M''Z''(x_{\prime\prime}-z_{\prime})-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z''-z_{\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(z''-x_{\prime\prime})\right\}+\frac{b''}{x_{\prime\prime}-z_{\prime}}\left\{-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z_{\prime}-x')+M_{\prime}Z_{\prime}(x_{\prime\prime}-x')-M'X'(x_{\prime\prime}-z_{\prime})\right\}\gtreqless 0,$$

$$\frac{a''}{x_{\prime\prime}-x'}\left\{-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z''-x')+M''Z''(x_{\prime\prime}-x')-M'X'(x_{\prime\prime}-z'')\right\}+\frac{c''}{x_{\prime\prime}-x'}\left\{-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z_{\prime}-x')+M_{\prime}Z_{\prime}(x_{\prime\prime}-x')-M'X'(x_{\prime\prime}-z_{\prime})\right\}\gtreqless 0,$$

$$\frac{b''}{z''-z_{\prime}}\left\{M''Z''(x'-z_{\prime})-M'X'(z''-z_{\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(z''-x')\right\}+\frac{d''}{z''-z_{\prime}}\left\{M''Z''(x_{\prime\prime}-z_{\prime})-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z''-z_{\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(z''-x_{\prime\prime})\right\}\gtreqless 0,$$

$$\frac{c''}{z''-x'}\left\{M''Z''(x'-z_{\prime})-M'X'(z''-z_{\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(z''-x')\right\}+\frac{d''}{z''-x'}\left\{-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z''-x')+M''Z''(x_{\prime\prime}-x')-M'X'(x_{\prime\prime}-z'')\right\}\gtreqless 0,$$

$$\frac{a''}{z_{\prime}-x'}\left\{M_{\prime}Z_{\prime}(x'-z'')-M'X'(z_{\prime}-z'')+M''Z''(z_{\prime}-x')\right\}+\frac{d''}{z_{\prime}-x'}\left\{-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(z_{\prime}-x')+M_{\prime}Z_{\prime}(x_{\prime\prime}-x')-M'X'(x_{\prime\prime}-z_{\prime})\right\}\gtreqless 0;$$

y esta ultima se convierte, cambiando los signos de los numeradores y denominadores, en

$$\frac{a''}{x'-z_{\prime}}\left\{M''Z''(x'-z_{\prime})-M'X'(z''-z_{\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(z''-x')\right\}+\frac{d''}{x'-z_{\prime}}\left\{-M'X'(z_{\prime}-x_{\prime\prime})+M_{\prime}Z_{\prime}(x'-x_{\prime\prime})-M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}(x'-z_{\prime})\right\}\gtreqless 0.$$

Si destinamos la trasformacion primera para cuando la relacion de desigualdad de los trozos está representada por la permutacion $M''M_{\prime\prime}M_{\prime}M'$; la segunda para el caso de verificarse la permutacion $M_{\prime\prime}M''M_{\prime}M'$, ó la que le sigue $M_{\prime\prime}M_{\prime}M''M'$; la tercera siempre que tenga lugar alguna de las permutaciones $M''M_{\prime\prime}M'M_{\prime}$ y $M''M'M_{\prime\prime}M_{\prime}$; la cuarta trasformacion en caso de considerar la permutacion $M_{\prime\prime}M''M'M_{\prime}$; y respectivamente las dos ultimas trasformaciones verificandose la septima permutacion y la octava: si observamos que en las bovedas simetricas no deben los acentos alterar la naturaleza de las funciones como sean unas mismas las letras, y en fin si fixamos la atencion en los diferentes oficios que exercen los trozos M'', M', $M_{\prime}$, $M_{\prime\prime}$ en las permutaciones á que nos referimos; echaremos de ver que no solo las espresiones incluidas dentro de los corchetes son funciones iguales á los primeros miembros de las condiciones (D) y (E), si no que ademas estan sus variables sugetas á los mismos limites que dimos en el num.º 29. á las letras M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$: de consiguiente, siendo ciertas las dos condiciones (D) y (E), lo será igualmente la general (C) con todos los valores posibles de las variables que contiene, en el caso de referirnos á bovedas simetricas. De aqui resulta un principio analogo al que hicimos ver en el n.º 19. con respecto al movimiento puro de traslacion, á saber: que si una boveda simetrica no puede venirse abaxo con el movimiento puro de rotacion, abriendose por seis juntas de lecho, tres de ellas situadas á un lado de la clave y con la misma posicion que las otras tres al opues-

-to, tampoco lo podrá hacer con otro numero cualquiera de juntas y situadas de diferente manera en ambos lados. Luego en el caso propuesto bastanos solo discutir las condiciones (D) y (E), para asegurarnos si la boveda adquirirá ó no el movimiento puro de rotacion.

32. Hagamos $M_{\prime}=0$: en la condicion (D), y $M'=0$ en la (E); y tendremos

$$\frac{M''Z''}{z''+K}-\frac{M'X'}{x'+K}\geqq 0 \text{ -------------- } (F)$$

$$\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}-\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}\geqq 0 \text{ -------------- } (G)$$

despues de dividir la primera por $(z''+K)(x'+K)$, y la segunda por $z_{\prime}x_{\prime\prime}$. Aqui se vé que para que estas condiciones queden satisfechas bajo todas las juntas de lecho, es necesario que los minimos de los primeros terminos sean mayores que los maximos de los segundos. Por estas expresiones no queremos precisamente dar á entender los verdaderos minimos y maximos de $\frac{M''Z''}{z''+K}$, $\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}$ y $\frac{M'X'}{x'+K}$, $\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$, esto és, aquellas cantidades que resultan de substituir por M'', $M_{\prime}$, M', $M_{\prime\prime}$, los valores sacados de igualar á cero las diferenciales de $\frac{M''Z''}{z''+K}$, $\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}$ &c, sino unicamente en el caso de salir con esta operacion $M''>M'$ y $M_{\prime\prime}>M_{\prime}$, conforme lo exige la naturaleza de la cuestion, y dexamos notado en el nº 29. Siempre que esta circunstancia no se verifique, será necesario, considerando solo las expresiones que dá la diferienciacion para el maximo de $\frac{M'X'}{K+x'}$ y el minimo de $\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}$, referir los trozos M'' y $M_{\prime\prime}$ hasta el Arranque; y si asi las cantidades $\frac{M''Z''}{K+z''}-\frac{M'X'}{K+x'}$ y $\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}-\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$ salen positivas, es señal que lo serán igualmente en todos los demas casos capaces de realizarse.

33. Cuando los valores de M'' y $M_{\prime\prime}$ sacados por la diferenciacion de $\frac{M''Z''}{K+z''}$ y $\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$, cumplen con la circunstancia dicha de ser $M''>M'$ y $M_{\prime\prime}>M_{\prime}$ dando á M' y $M_{\prime}$ los que convienen al Maximo de $\frac{M'X'}{K+x'}$ y al minimo de $\frac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}$; ó en su defecto, cuando los valores de $\frac{M''Z''}{K+z''}$ y $\frac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$ referidos al arranque, son el primero menor y el segundo mayor que los correspondientes á todas las demas

substituciones posibles, en cualquiera de estos dos casos, los unicos que regularmente tienen lugar en la practica, es inutil discutir las condiciones (D) y (G) con mayor generalidad que la que se abrazan sus derivadas (F) y (G) puestas al principio del num.° 32. En efecto, poniendo aquellas bajo la forma

$$\left\{\frac{M''Z''}{K+Z''}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}(K+Z'')(x'-z_{,})+\left\{\frac{M_{,}Z_{,}}{K+Z_{,}}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}(K+Z_{,})(Z''-x')\gtreqless 0,$$

$$\left\{\frac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}\right\}(z_{,}-x')x_{,,}+\left\{\frac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\frac{M'X'}{x'}\right\}(x_{,,}-z_{,})x'\gtreqless 0,$$

la cual se consigue facilmente substituyendo en la primera $\frac{(K+Z'')(x'-z_{,})}{K+x'}+\frac{(K+Z_{,})(Z''-x')}{K+x'}$ por $Z''-z_{,}$ coeficiente de $M'X'$, y en la segunda $\frac{x_{,,}}{z_{,}}(z_{,,}-x')+\frac{x'}{z_{,}}(x_{,,}-z_{,})$ por $x_{,,}-x'$ coeficiente de $M_{,}Z_{,}$, notamos desde luego que los primeros terminos contenidos en los corchetes son positivos, siendo ciertas las condiciones (F) y (G), é igualmente los segundos en virtud del supuesto hecho al principio de este numero: por que en el concepto de ser $\frac{M''Z''}{K+Z''}$ el minimo y $\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}$ el maximo de todas las funciones parecidas á ellas, se tendrá $\frac{M''Z''}{K+Z''}<\frac{M_{,}Z_{,}}{K+Z_{,}}$, $\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}>\frac{M'X'}{x'}$; y de consiguiente si son ciertas las condiciones (F) y (G), con mucha mas razon será $\frac{M_{,}Z_{,}}{K+Z_{,}}-\frac{M'X'}{K+x'}>0$, $\frac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\frac{M'X'}{x'}>0$. Resulta, pues, de todo lo dicho en este numero y los tres anteriores, que unicamente habrá necesidad de emplear la condicion (D) con toda su generalidad, cuando refiriendose M'' al minimo de $\frac{M''Z''}{K+Z''}$, y M' al maximo de $\frac{M'X'}{K+x'}$, sea $M''<M'$ al mismo tiempo que $\frac{M''Z''}{K+Z''}<\frac{M'X'}{K+x'}$; y del propio modo la condicion (E) en el caso de tenerse $M_{,,}<M_{,}$ y $\frac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}<\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}$, dando á los trozos $M_{,,}$ y $M_{,}$ los valores correspondientes al maximo de $\frac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}$ y al minimo de $\frac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}$.

34. Apliquemos esta doctrina á la boveda de medio punto, y veamos dando á las dovelas el octavo del radio del arco interior, si este espesor es suficiente para impedir el movimiento puro de rotacion. Conoceremos desde luego que la cantidad $\frac{M''Z''}{K+Z''}$, siendo igual á

$$\frac{(K+x)(xK+\frac{1}{2}K^2)\alpha''\,\text{sen.}\,\alpha''-\frac{1}{3}(1-\cos.\alpha'')(3x^2K+3xK^2+K^3)}{(1-\cos.\alpha'')(K+x)}$$

que se reduce á $2(rk+\frac{1}{2}k^2).\frac{\frac{1}{2}\alpha''}{tang.\frac{1}{2}\alpha''} - \frac{1}{3}\left(\frac{3r^2k+3rk^2+k^3}{k+r}\right)$, deve tener su menor valor con la substitucion $\alpha''=90°$, puesto que la cantidad $\frac{\frac{1}{2}\alpha''}{tang.\frac{1}{2}\alpha''}$ es tanto menor quanto mayor α'', no pasando este angulo de 180°: asi, pues, será minimo de $\frac{M''Z''}{k+z''} = 0,0831\, r^2$. El maximo de $\frac{M'X'}{k+x'} = \frac{(rk+\frac{1}{2}k^2)\alpha' sen.\alpha' - (1-cos.\alpha')(r^2k+rk^2+\frac{1}{3}k^3)}{k+r-r\,cos.\alpha'}$ se halla entre los tres valores 54°, 55° y 56 de α', pues haciendo sucesivamente $\alpha' = 54° = 55° = 56 =$, sale $\frac{M'X'}{k+x'} = 0,07973\, r^2 = 0,07974\, r^2 = 0,07970\, r^2$: con lo qual podemos suponer sin error substancial la cantidad $0,0798\, r^2$ por el maximo de $\frac{M'X'}{k+x'}$; y como $\frac{M''Z''}{k+z''} = 0,0831\, r^2$ es sensiblemente mayor que $\frac{M'X'}{k+x'} = 0,0798\, r^2$, se infiere de aqui que dando $\frac{1}{8}\, r$ de grueso á las dovelas, tienen estas el suficiente para impedir que la boveda de medio punto adquiera el movimiento puro de rotacion.

35. Si en vez de $k=\frac{1}{8}\, r$, hubieramos hecho $k=\frac{1}{9}\, r$, ya con esta cantidad saldria $\frac{M'X'}{k+x'}$ mayor que $\frac{M''Z''}{k+z''}$: lo que indica que el grueso $k=0.1061\, r$ dado por M. Couplet á fin de impedir el movimiento puro de rotacion, es incapaz de conseguir dicho objeto. Esta diferencia de resultados entre la teorica de M. Couplet y la nuestra, proviene de suponer aquel autor que el empuje mayor del arco es dado por la junta de lecho que forma con la vertical el angulo de 45°, por cuya razon lo llama angulo de rotura; pero el calculo del numero anterior nos hace ver que el maximo de $\frac{M'X'}{k+x'}$ no está sino á los 55° de α'.

36. Una vez que la condicion (F) es cierta en la boveda anteriormente propuesta haciendo $k=\frac{1}{8}\, r$, y que dexa de serlo suponiendo $k=\frac{1}{9}\, r$, será excusado pasar á discutir la condicion (G) referida al mismo exemplo, pues deve necesariamente de verificarse con qualquier valor que se de á k. En efecto, supongamos por un instante que la condicion (G) no tiene lugar haciendo en ella $k=\frac{1}{8}\, r$: y claro

que con mucha mas razon dejará de verificarse dando á K un valor menor, cual es $K = \frac{1}{9} r$; pero con esta cantidad sabemos que la boveda ha de venirse abajo hundiendose por el vertice y elevandose por los riñones segun se deduce de lo expuesto en los num.^s 29 y 35., y por otra parte ningun Arco puede con unas mismas dimensiones y aun mismo tiempo adquirir dos movimientos tan contrarios como son los que se representan en las fig.^as 10.^a y 11.^a y que evitan respectivamente las condiciones (D) y (E), ó sus derivadas (F) y (G): luego forzosamente ha de ser falso el supuesto que hace negativo el primer miembro de la condicion (G) en el caso de referirnos á una boveda de medio punto y uniformemente gruesa. De aquí se infiere que aun que sean dos las condiciones sacadas para evitar en las bovedas simetricas el movimiento puro de rotacion, nunca habrá necesidad de discutir sino solamente una de ellas. La unica dificultad que puede presentarse es el saber cual de las dos deve convenir á la cuestion, pero cuando este conocimiento no nos le proporcione la simple inspeccion de la figura que se quiere dar á la boveda, tomaremos arvitrariamente cualquiera de las dos condiciones, y su consideracion nos mostrará prontamente si la eleccion esta mal ó bien hecha. Por exemplo, si en una media naranja queremos averiguar el menor grueso que pueden tener las dovelas siendo todas de un mismo espesor; como en esta especie de bovedas los trozos inferiores se hallan á igualdad de Arcos, mas robustos ó cargados que los superiores, deveremos preferir la condicion (G) á la (F), por que en caso de Arruinarse la boveda por uno de los dos movimientos expresados en las fig.^s 12.^a y 13.^a es mas natural que lo haga adquiriendo el de la fig.^a 13.^a que el de la fig.^a 12.^a Mas si prescindiendo de esta reflexion, eligiesemos ciegamente la condicion (F), vieramos efectuado el calculo que quedaba completamente satisfecha por pequeño que fuese el grueso de las dovelas: y esta misma particularidad nos avisaria que la dificultad no está en hacer que la media naranja circular dexe de

adquirir el movimiento de la Fig.ª 12.ª, sino el que se expresa por medio de la Fig.ª 13.ª

37. Asi, pues, aplicada la condicion (G) al exemplo propuesto, encontraremos estar el menor grueso posible de las dovelas entre $\frac{1}{23}$ y $\frac{1}{24}$ del radio del circulo interior generador. Con efecto, igualando á cero la diferencia de las expresiones

$$\frac{M_{II}X_{II}}{x_{II}} = \frac{\frac{1}{3}\{(x+K)^3-x^3\}(x-x\cos.\alpha_{II})\operatorname{sen}.\alpha_{II}-\frac{1}{8}(\alpha_{II}-\operatorname{sen}.\alpha_{II}\cos.\alpha_{II})\{(x+K)^4-x^4\}}{x-x\cos.\alpha_{II}}$$

$$\frac{M_I Z_I}{z_I} = \frac{\frac{1}{3}\{(x+K)^4-x^3(x+K)\}(1-\cos.\alpha_I)\operatorname{sen}.\alpha_I-\frac{1}{8}(\alpha_I-\operatorname{sen}.\alpha_I\cos.\alpha_I)\{(x+K)^4-x^4\}}{x-(x+K)\cos.\alpha_I},$$

y ordenando despues con respecto á las potencias de K, se vé corresponder proximamente el maximo de K á las dos substituciones $\alpha'' = 30^\circ$, y $\alpha_{II} = 70^\circ$ en el supuesto de contentarnos con las que de diez en diez grados se pueden dar á estos angulos: con lo cual despreciando las potencias de K superiores al cuadrado, se tendrá

$$0.0123K^2+0.1966K-0.0083=0,$$

que dá $k = 0.0421 = \frac{1}{23.7}$, esto es un valor mayor que $\frac{1}{24}r$ y menor que $\frac{1}{23}r$.

M. Rondelet asegura en su Arte de construir que las medias naranjas no tienen empuje alguno, porque al aplicarles una formula suya que es un caso particular de la condicion (F), observa que queda satisfecha haciendo $K=0$; y aun que esto ultimo sea cierto, la consecuencia que de aqui saca es falsa segun el calculo que acabamos de indicar. El salir cierta la condicion (F) con cualquier valor de K nos advierte solamente que el movimiento de la Fig.ª 10.ª es imposible en las medias naranjas, pero no el representado por la Fig.ª 11.ª, que debe verificarse realmente siendo K menor que $\frac{x}{23.7}$.

Capitulo tercero

De las condiciones necesarias para que no se verifiquen los cinco movimientos mixtos, y reducion de todas las generales á otras mas sencillas.

38. Daremos principio á este capitulo por determinar las cinco condiciones correspondientes á los movimientos deducidos de las permutaciones *rrt, trr, trt, tr,,rt*, suprimiendo en la discusion las reflexiones que nos conducen á la descomposicion que seguimos, por ser de la misma naturaleza que las expuestas en los capitulos precedentes. Hecha esta advertencia, empecemos por los movimientos de primera y segunda especie que se representan en las figuras 3.ª y 4.ª, descomponiendo inmediatamente el trozo $M'N_{,} = M' + M_{,}$ en dos fuerzas F' y F, que pasen respectivamente por los puntos M' y $N_{,}$, de suerte que la segunda fuerza y el trozo $M_{,,}N_{,}$ formen en la fig.ª 3.ª equilibrio de rotacion con respecto al punto $M_{,,}$, y equilibrio de traslacion con relacion á la junta $N_{,,}M_{,,}$ en la fig.ª 4.ª suponiendo que el trozo $M_{,,}N_{,}$ de esta figura se dirige á resvalar en direccion de $N_{,,}$ á $M_{,,}$. Asi, con la primera descomposicion tendremos $F'\cos.(180^{\circ}-\lambda'-\alpha'') - F'\text{tang.}f\,\text{sen.}(180^{\circ}-\lambda'-\alpha'') =$

$$\frac{F'\cos.(180^{\circ}-\lambda'-\alpha''+f)}{\cos.f} = \left\{\frac{\text{sen.}(\alpha''-f)\,\text{tang.}\lambda' - \cos.(\alpha''-f)}{(z_{,}-x')\cos.f\,\text{tang.}\lambda' + (u_{,}+y')\cos.f}\right\}\text{Mom}_{,}.(M_{,}+M') = \text{-------}$$

$$\frac{\{(u_{,}+y')\,\text{tang.}(\alpha''-f)+z_{,}-x'\}\cos.(\alpha''-f).\,\text{Mom}_{,,}.(M_{,,}+M') - \{(y_{,,}+y')\,\text{tang.}(\alpha''-f)+x_{,,}-x'\}\cos.(\alpha''-f).\,\text{Mom}_{,}.(M_{,}+M')}{\{(u_{,}+y')(x_{,,}-x')-(y_{,,}+y')(z_{,}-x')\}\cos.f}$$

y esta cantidad expresará (veanse los num.^s 6 y 24) el empuje que la fuerza F' produce contra el trozo $M'N''$ en la fig.ª 3.ª para hacerlo resvalar en direccion de M'' á N''. Con la segunda descomposicion será $\text{Mom}''.F' = \left\{\frac{(z''-x')\,\text{tang.}\lambda' - (u''-y')}{(z_{,}-x')\,\text{tang.}\lambda' + (u_{,}+y')}\right\}.\text{Mom}_{,}.(M_{,}+M') =$

$$\frac{\{(u_{,}+y')(z''-x')+(z_{,}-x')(u''-y')\}(M'+M_{,,}) - \{(z''-x')+(u''-y')\,\text{tang.}(\alpha_{,,}+f)\}.\text{Mom}_{,}.(M_{,}+M')}{(u_{,}+y')\,\text{tang.}(\alpha_{,,}+f)-(z_{,}-x')}$$

que indicará el momento de F', ó el esfuerzo con que el trozo $N_{,}M'$ intenta en la fig.ª 4.ª hacer girar al inferior $M'N''$ por el punto N'' de apoyo. Restada la primera expresion de $(M''-M')\frac{\cos.(\alpha''-f)}{\cos.f}$, y la segunda de $\text{Mom}''(M''-M')$ resultarán las condiciones:

$$(M''-M')\cos.(\alpha''-f) - \frac{\{(u_1+y')\,\text{tang}.(\alpha''-f)+z_1-x'\}\cos.(\alpha''-f).Mom_{11}.(M_{11}+M')}{(u_1+y')(x_{11}-x')+(x'-z_1)(y_{11}+y')} +$$

$$\frac{\{(y_{11}+y')\,\text{tang}.(\alpha''-f)+x_{11}-x'\}\cos.(\alpha''-f).Mom_1.(M_1+M')}{(u_1+y')(x_{11}-x')+(y_{11}+y')(x'-z_1)} \geqq 0,$$

$$Mom''.(M''-M') - \frac{\{(u_1+y')(z''-x')+(z_1-x')(u''-y')\}(M_{11}+M')}{(u_1+y')\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+x'-z_1} +$$

$$\frac{\{(u''-y')\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+z''-x'\}Mom_1.(M_1+M')}{(u_1+y')\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+x'-z_1} \geqq 0,$$

que sirven para impedir respectivamente los movimientos de primera y segunda especies.

39. Si siguiendo los mismos principios de simplicacion que en los capitulos antecedentes, hacemos

$$a''' = (u_1+y')(x_{11}-x')+(x'-z_1)(y_{11}+y'), \qquad a^{IV} = (u_1+y')\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+x'-z_1,$$

$$b''' = (y_{11}+u')\,\text{tang}.(\alpha''-f)+x_{11}-z_1, \qquad b^{IV} = (u''+u_1)\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+z''-z_1,$$

$$c''' = (y_{11}+y')\,\text{tang}.(\alpha''-f)+x_{11}-x', \qquad c^{IV} = (u''-y')\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)+z''-x',$$

$$d''' = (u_1+y')\,\text{tang}.(\alpha''-f)+z_1-x', \qquad d^{IV} = (u_1+y')(z''-x')+(z_1-x')(u''-y'),$$

y observando que entre estas cantidades existen las equaciones

$$\left.\begin{aligned} a'''\,\text{tang}.(\alpha''-f)-b'''x'+c'''z_1-d'''x_{11}&=0\\ -b'''+c'''-d'''&=0\end{aligned}\right\}\text{----}(1) \qquad \left.\begin{aligned} a^{IV}z''-b^{IV}x'+c^{IV}z_1-d^{IV}\,\text{tang}.(\alpha_{11}+f)&=0\\ a^{IV}-b^{IV}+c^{IV}&=0\end{aligned}\right\}\text{--}(2)$$

nos será facil trasformar las condiciones anteriores, substituyendo por $Mom''.(M''-M')$, $Mom_{11}.(M_{11}+M')$ y $Mom_1.(M_1+M')$ sus expresiones (veanse el num. 24), en

$$a'''M''-b'''M'X'+c'''M_1Z_1-d'''M_{11}X_{11} \geqq 0,\text{-----------}(X)$$

$$a^{IV}M''Z''-b^{IV}M'X'+c^{IV}M_1Z_1-d^{IV}M_{11} \geqq 0,\text{---------}(Y)$$

y haciendo desaparecer los coeficientes a''', b''', a^{IV} y b^{IV} por medio de la equacion (1) y (2), en estas otras

$$\frac{(x'-z')}{d'''}\left\{M''\cot.(\alpha''-f)-\frac{M'X'-M_1Z_1}{x'-z_1}\right\}+\frac{(x_{11}-x')}{c'''}\left\{M''\cot.(\alpha''-f)-\frac{M_{11}X_{11}-M'X'}{x_{11}-x'}\right\}\geqq 0\text{---}(3)$$

$$\frac{(z''-z_1)}{d^{IV}}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-\frac{M''Z''-M_1Z_1}{z''-z_1}\right\}+\frac{\text{tang}.(\alpha_{11}+f)}{c^{IV}}\left\{\frac{M''Z''-M'X'}{z''-x'}-M_{11}\cot.(\alpha_{11}+f)\right\}\geqq 0\text{---}(4)$$

Baxo estas dos formas se emplearán para ver si las bovedas pueden ó no adquirir alguno de los movimientos espresados en las Fig.s 3.a y 4.a, siguiendo el mismo metodo que se dió en el num.o 25 para discutir la condicion correspondiente al movimiento puro de rotacion. Para no hacer en estos tanteos

operaciones de suyo excusadas, y á fin de que las multiplicaciones y divisiones hechas con las condiciones del num.º 38. al trasformarlas en las cuatro de este, no produzcan error alguno de la naturaleza de los advertidos en el num.º 12, es necesario elegir solamente aquellos trozos en que se verifiquen las circunstancias siguientes.

40. Si refiriendo la fig.ª 19. al movimiento mixto de primera especie, la linea tirada por los puntos $N_{,}$ y M' forma con la junta $M''N''$ el angulo $N_{,}\,m\,M''$ mayor $90-f$, la fuerza F' no podrá en este caso, por formar otro angulo mas abierto con la misma junta, empujar al trozo $M'N''$ para que suba resbalando sobre el plano $M''N''$; y esto nos hace ver que devemos escoger aquellos puntos $N_{,}$ y M' en que se tenga $N_{,}\,m\,M'' < 90-f$. Suponiendo en efecto $N_{,}\,m\,M'' \angle 90-f$, y en virtud de la condicion tercera del num.º 4 deviendo ser $M_{,,}\,N_{,}\,M' \angle 180$, cualesquiera que sean los puntos $M_{,,}$, $N_{,}$ y M'; inferiremos de aqui estas otras dos $M_{,,}\,n\,M'' \angle 90-f$ y $M_{,,}\,p\,M'' \angle 90-f$, en el supuesto de pasar las lineas $M_{,,}\,n$ y $M_{,,}\,p$ respectivamente por los puntos M' y $N_{,}$: Luego el seno de $M_{,,}\,N_{,}\,M'$, y los cosenos de $N_{,}\,m\,M''+f$, $M_{,,}\,n\,M''+f$ y $M_{,,}\,p\,M''+f$ seran positivos, y de consiguiente las cantidades $a_{,}'''$ $b_{,}'''$ c''' y $d_{,}'''$ pues sen$(M''N_{,}M')$ $=\frac{(u_{,}+y')(x_{,,}-x')+(x'-z_{,})(y_{,,}+y')}{(M_{,,}N_{,})\cdot(N_{,}M')}$, cos.$(M_{,,}pM''+f)=\frac{\cos.(\alpha''-f)}{M_{,,}N_{,}}\{(y_{,,}-u_{,})\,\text{tang.}(\alpha''-f)+x_{,,}-z_{,}\}$, cos.$(M_{,,}nM''+f)=\frac{\cos.(\alpha''-f)}{M_{,,}N'}\{(y_{,,}+y')\,\text{tang.}(\alpha''-f)+x_{,,}-x'\}$, y cos.$(N_{,}mM''+f)=$... $\frac{\cos.(\alpha''-f)}{N_{,}M'}\{(u_{,}+y')\,\text{tang.}(\alpha''-f)+z_{,}-x'\}$. De la misma manera demostrariamos que los coeficientes $a_{,}^{IV}$ b^{IV} c^{IV} y d^{IV} de la condicion (Y) deben tambien considerarse solo en los casos de salir positivos, no olvidando primeramente que para que el trozo $M_{,,}N_{,}$ pueda bajar resvalando por su junta $N_{,,}'M_{,,}$, necesita ser $\alpha_{,,}+f$ menor que 90 grados, y partiendo de las condiciones $N_{,}M'N'' \angle 180$,° $M'rM_{,,} \angle 90+f$, $N''gM_{,,} \angle 90-f$ y $N''sM_{,,} \angle 90+f$ que en el concepto de referirse ahora la fig.ª 19. al movimiento mixto de segunda especie, y de pasar las lineas $M'r$, $N''g$ y $N''s$ respectivamente por los puntos $N_{,}$, M' y $N_{,}$ se sacan: la primera, porque de verificarse lo contrario la direccion de la fuerza F' para-

–ria por abajo del punto N_1'' y no podria hacer que el trozo $M'N''$ girase al rededor de este punto en el sentido que suponemos: la segunda condicion, por lo establecido en la cuarta del num.º 4: y la tercera y ultima por ser una consequencia inmediata de las dos anteriores.

41. Supuestas, pues, las cantidades a_1''' a_1^{IV} b_1''' b_1^{IV} &c positivas, si considerando ahora que las bovedas son simetricas, hacemos $M_{II} = M'$ en la condicion (H), y $M'' = M_I$ en la (I), veremos que las siguientes

$$M''(x'-z_1)\cot.(\alpha''-f) - (M'X' - M_1 Z_1) \gtreqless 0 \text{ - - - - - - - - - - } (K)$$

$$M_1 Z_1 - M'X' - M_{11}(z_1 - x')\cot.(\alpha_{11}+f) \gtreqless 0 \text{ - - - - - - - - - - } (L)$$

en que se convierten aquellas, son suficientes unidas á las (D) y (E) para evitar en las bovedas simetricas que tres trozos situados de ~~la manera que se quiera~~ cualquiera manera tomen los movimientos mixtos de primera y segunda especie. Por que dando á las condiciones (H), y (I) las seis formas que resultan de hacer desaparecer sucesivamente dos de sus cuatro coeficientes por medio de las equaciones (1) y (2), se observará: primero, que todas ellas se componen de espresiones ó funciones enteramente semejantes á los primeros miembros de las condiciones (D) y (E) que ya tenemos dadas, ó de las dos (K) y (L) que acabamos de establecer: segundo, que sus variables estan concevidas bajo los mismos limites que los supuestos $M_{II} = M'$ y $M'' = M_I$ prescriben á los trozos contenidos en las condiciones (D), (E), (K) y (L), siempre que cada una de dichas trasformaciones se refiera á aquel ó aquellos casos que la convienen de los ocho numerados en el num.º 30 para para espresar todas las diferentes relaciones de desigualdad que pueden exsistir entre los trozos M_1'', M_1', y M_{11} cuando se conside–ran de una manera general segun lo hicimos en el num.º 31. con las trasfor–maciones de la condicion (C). Podemos igualmente demostrar de una forma pare–cida á la del n.º 29. que las condiciones (K) y (L) impiden directamente

y por si solas los movimientos expresados en las Fig.^s^ 12.^a^ y 13.^a^ esto es que la boveda se abra por cinco trozos situados simetricamente con respecto á la clave, los dos inferiores con movimiento de traslacion en direccion del intrados al extrados, como lo representa la Figura 12; ó en sentido contrario segun se vé en la Fig.^a^ 13.^a^ y los tres superiores apoyados en los puntos M_{11}, N_1, n' y M', ó N_1, m_1, M' y N'', segun nos refiramos á la Fig.^a^ 12.^a^ ó á la Fig.^a^ 13.^a^

42. Haciendo en la condicion (K) $M'=0$, y en la condicion (L) $M_1=0$, se tiene

$$M''\cot.(\alpha''-f)-\frac{M'X'}{K+x'}\gtreqless 0, \text{------------} (M)$$

$$\frac{M_1Z_1}{z_1}-M_{11}\cot.(\alpha_{11}+f)\gtreqless 0, \text{------------} (N)$$

y estas dos condiciones bastan en la mayor parte de casos para impedir completamente en las bovedas simetricas los movimientos mixtos de primera y segunda especie. Nos convenceremos de esto, si ponemos las condiciones (K) y (L) bajo la forma.

$$M''\cot.(\alpha''-f)-\frac{M'X'}{K+x'}+\frac{(K+z_1)}{x'-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{K+z_1}-\frac{M'X'}{K+x'}\right\}\gtreqless 0,$$

$$\frac{M_1Z_1}{z_1}-M_{11}\cot.(\alpha_{11}+f)+\frac{(x'}{z_1-x'}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1}-\frac{M'X'}{x'}\right\}\gtreqless 0,$$

y teniendo presente que en la primera debe ser $x'>z_1$ y en la segunda $z_1>x'$, observamos que los primeros miembros de estas condiciones no son otra cosa que una suma de cantidades positivas, siendo ciertas las condiciones (M), (N) y las correspondientes al movimiento puro de rotacion anotadas con las letras (F) y (G) ...

43 Apliquemos primeramente la condicion (M) á la misma boveda de medio punto discutida en los capitulos anteriores; y veamos en que casos puede ó no adquirir el movimiento mixto de primera especie. Hagamos tang. $f=0.31$ y $K=\frac{1}{8}\cdot r$, una vez que por lo dicho en el numero 20 y 34 son estos valores los menores que pueden tener tang. f y K para impedir los movimientos puros de traslacion y rotacion. Con esto tendremos minimo de $M''\cot.(\alpha''-f)=M''\cot.(90^\circ-f)$ (vease num.^o^ 20) $=90^\circ(rK+\frac{1}{2}K^2)\,\text{tang.}f=0.0646r^2$: maximo de $\frac{M'X'}{K+x'}=0.0798r^2$ (vease n.^o^ 34), y $M''\cot.(\alpha''-f)-\frac{M'X'}{K+x'}=-0.0152r^2$, que es una cantidad negativa. Luego es necesario para evitar en esta clase de bovedas el movimi-

ento mixto de primera especie, ó dar á las dovelas un espesor mayor que aquel con que se logra impedir el movimiento de rotacion, ó bien suponer el rozamiento mayor que el puramente necesario para sofocar el movimiento de traslacion. Si hacemos tang. $f = \frac{1}{2}$, que es el supuesto mas comunmente acreditado por la experiencia, con este valor estan ya las bovedas en cuestion libres de tomar el movimiento mixto de primera especie, sin necesidad de aumentar el espesor $K = \frac{1}{8} v$: efectivamente será en dicho caso $M''\cot.(\alpha''-f) = M''\text{tang.}f = 0.1041\, l^2$, y por consecuencia el primer miembro de la condicion (M) una cantidad positiva.

44 En el exemplo anterior hemos solo considerado la condicion (M) sin atender á la (N), por que entre ellas existe la misma correspondencia que expresamos en el num.º 36 con respecto á las condiciones (F) y (G): es decir que una sola de las dos (M) y (N) podrá dexar ó no de verificarse segun el diferente espesor que se den á aquellas partes que influyen mas directamente en la menor ó mayor robustez del Arco; mientras que la otra condicion permanece constantemente siendo cierta bayo todas estas diferentes substituciones: pués, es incompatible, segun advertimos tambien en el numero ya citado, que una boveda pueda tomar á un mismo tiempo dos movimientos diametralmente opuestos, y pasar del estado de reposo al de movimiento por aumentar en ella aquellas dimensiones que visiblemente favorecen su solidez á medida que son mayores.

45. Diximos en el num.º 17. que la boveda adintelada era, apesar de satisfacer en todos sus puntos á la equacion (10) de aquel capitulo, una de las mas expuestas á adquirir el movimiento mixto de primera especie; y ahora vamos á determinar la relacion que deve existir entre sus dimensiones para evitar el referido movimiento. Llamemos l la semiluz, a el angulo de arranque, y haciendo $f = 0$ á fin de simplificar mas el calculo, tendremos $M''\cot.\alpha'' = lK\cot.a + \frac{1}{2}K^2$; $\frac{M'X'}{K+v'} = (\frac{1}{2}l^2\cot.^2 a - \frac{1}{6}K^2)\,\text{tang.}^2 a'$

$= \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{6}k^2 \text{tang.}^2 a$ - - - - - - - - - - - - - - - - - pues la expresion $(\frac{1}{2}l^2\cot.^2 a - \frac{1}{2}k^2)\text{tang.}^2\alpha'$ crece á medida que es mayor el angulo α', y este tiene por limite el angulo a de arranque: finalmente la condicion (M), esto es, $lk\cot.a + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{6}k^2\text{tang.}^2 a \geqq 0$, nos dará eliminando k

$$\frac{k}{l} \geqq \frac{-1+\sqrt{1+\text{tang.}^2 a + \frac{1}{3}\text{tang.}^4 a}}{\text{tang.}\,a + \frac{1}{3}\text{tang.}^3 a} \text{ - - - - - - - - - - - - } (5)$$

Si al angulo de arranque damos diferentes valores, observaremos que el maximo del segundo miembro corresponde proximamente á la substitucion $a = 60^\circ$, y en este caso sale, al poco más ó menos, $\frac{k}{l} \geqq \frac{1}{2}$: asi que, con dar á la clave un valor igual á la cuarta parte de la luz, se sujeta esta boveda á que en ningun caso adquiera los movimientos mixtos hasta aqui considerados, cualquiera que sea el angulo de arranque.

116. Pasemos ya á hablar de los movimientos mixtos de tercera, cuarta y quinta especie; y con esta mira descompogamos como siempre el trozo $N_1 M'$ de las Figuras 5.ª, 6.ª, y 7.ª en las fuerzas F' y F_1, haciendo en la figura 5.ª que formen con las juntas $M'N'$ y $M_1 N_1$ los angulos $\varphi M'N'$ y $\varphi m N_1$ iguales á $90 - f$, y pase ademas la primera fuerza por el punto M': en la fig.ª 6.ª que las dos fuerzas pasen respectivamente por los puntos N' y M', formando la componente F' con la junta $M'N'$ el angulo $\varphi N'M' = 90 + f$: y ultimamente en la figura 7.ª, que pasando la fuerza F' por M', y la F_1 por el punto N_1, esta ultima se equilibre con el esfuerzo que el trozo $M_{11}N_1$ hace para resvalar en direccion de N_{11} á M_{11}. Hallados de este modo los diferentes valores de F' y F_1 correspondientes á cada descomposicion, veremos que en el primer caso,

$$\frac{(M'+M_1)\cos.(\alpha_1+f)}{\text{sen.}(\alpha'+f+\alpha_1+f)}\left\{(z''-x')\cos.(\alpha'+f) - (u''-y')\,\text{sen.}(\alpha'+f)\right\}$$

es el momento de F' con respecto al punto exterior N'' para hacer girar en la Fig.ª 5.ª al trozo $M'N'$ por el punto N': que en el segundo caso,

$$\frac{\text{sen.}(\alpha''-f-\alpha'-f).\,\text{Mom}_{\prime}.(M_{\prime}+M')}{(x_{\prime}-z')\cos.f.\cos.(\alpha'+f)+(y_{\prime}+u')\cos.f\,\text{sen.}(\alpha'+f)}$$

representa el empuje que Z' produce en la fig.ª 6.ª para hacer resvalar al trozo $N'M''$ en direccion de M'' á N'': y ultimamente que

$$\frac{\{(u'+y')\text{tang.}(\alpha''-f)+(z_{\prime}-x')\}(M_{\prime\prime}+M')\cos.(\alpha''-f)-\{\text{tang.}(\alpha''-f)+\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)\}\text{Mom}_{\prime}.(M_{\prime}+M')\cos.(\alpha''-f)}{(u_{\prime}+y')\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)\cos.f-(z_{\prime}-x')\cos.f}$$

expresa el empuje que la misma fuerza tiene en la fig.ª 7.ª para hacer mover al trozo $N'M''$ con igual movimiento que en la figura anterior. Restando estas tres cantidades de la resistencia que el trozo $N'N''M''N'$ opone en cada uno de estos casos, tendremos las condiciones que siguen

$$\text{Mom}''(M''-M')-\frac{(M'+M_{\prime})\cos.(\alpha_{\prime}+f)}{\text{sen.}(\alpha'+f+\alpha_{\prime}+f)}\{(z''-x')\cos.(\alpha'+f)-(u''-y')\text{sen.}(\alpha'+f)\}\gtreqless 0\text{ - - - -(O)}$$

$$(M''-M')\cos.(\alpha''-f)-\frac{\text{sen.}(\alpha''-f-\alpha'-f).\,\text{Mom}_{\prime}.(M_{\prime}+M')}{(x_{\prime}-z')\cos.(\alpha'+f)+(y_{\prime}+u')\text{sen.}(\alpha'+f)}\gtreqless 0\text{ - - - - - - - - - - -(P)}$$

$$M''-M'-\frac{(M_{\prime\prime}+M')\{(u'+y')\text{tang.}(\alpha''-f)+z_{\prime}-x'\}-\text{Mom}_{\prime}.(M_{\prime}+M')\{\text{tang.}(\alpha''-f)+\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)\}}{(u_{\prime}+y')\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)-(z_{\prime}-x')}\gtreqless 0\text{ - -(Q)}$$

para impedir dichos movimientos.

47. Despues de probar en estas tres condiciones que los coeficientes que dividen ó multiplican á las cantidades $M_{\prime}+M'$, $\text{Mom}''(M''-M')$, $\text{Mom}_{\prime}.(M'+M_{\prime})$, se deven considerarse acompañados del signo positivo, á causa de lo expuesto en el n.º 4, y á fin de que el trozo $M'+M_{\prime}$ tenga en las tres figuras un esfuerzo efectivo contra el inferior de su derecha; pasariamos á dar á las mismas condiciones las formas convenientes para poderlas discutir mejor, empleando el metodo de tanteos segun se ha hecho en los demas movimientos; pero dando todo esto por efectuado, pues su execucion no presenta dificultad ninguna, solo nos detendremos al presente en referir dichas condiciones al caso de ser simetricas las bovedas.

48. La condicion (Q) haciendo $a^{v}=(u_{\prime}+y')\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)-(z_{\prime}-x')$, $b^{v}=\text{tang.}(\alpha''-f)+\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)$, $d^{v}=(u_{\prime}+y')\text{tang.}(\alpha''-f)-(x'-z_{\prime})$, y teniendo presente que entre estas cantidades existe la equacion $a^{v}\text{tang.}(\alpha''-f)-b^{v}(x'-z_{\prime})-d^{v}\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)=0$, podra ponerse bajo las dos formas:

$$b^{v}\{M''(x'-z_{\prime})\cot.(\alpha''-f)-M'X'+M_{\prime}Z_{\prime}\}+d^{v}\text{tang.}(\alpha_{\prime\prime}+f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{\prime\prime}\cot.(\alpha_{\prime\prime}+f)\}\gtreqless 0,$$

$$a^{v}\text{tang.}(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{\prime\prime}\cot.(\alpha_{\prime\prime}+f)\}+b^{v}\{M_{\prime}Z_{\prime}-M'X'-M_{\prime\prime}(z_{\prime}-x')\cot.(\alpha_{\prime\prime}+f)\}\gtreqless 0.$$

Por la primera forma se vé que el movimiento mixto de quinta especie no puede tener lugar en bovedas simetricas mientras la relacion de desigualdad de los trozos que entran á producir el empuje esté indicada por cualquiera de las cuatro permutaciones $M_{,,}M''M'M_{,}$, $M''M_{,,}M'M_{,}$, $M''M'M_{,,}M_{,}$, $M''M'M_{,}M_{,,}$ (veanse el num.º (30)), y sean ciertas las condiciones (B) y (K) correspondientes á los movimientos puro de traslacion y mixto de primera especie: por la segunda forma siempre que la referida relacion esté representada por cualquiera de las otras cuatro permutaciones restantes $M''M_{,,}M_{,}M'$, $M_{,,}M''M_{,}M'$, $M_{,}M_{,,}M''M'$, $M_{,,}M_{,}M'M''$, y se verifiquen ademas la misma condicion (B) que acabamos de mencionar y la correspondiente al movimiento mixto de segunda especie que quedó anotado con la letra (L). Por lo tanto es imposible que en semejantes bovedas tenga lugar el movimiento mixto de quinta especie, no teniendolo el puro de traslacion ni los dos mixtos de primera y segunda especies; y de consiguiente enteramente superfluo el tener presente la condicion (Q) para tales casos.

49. Para referir las condiciones (O) y (P) á la misma especie de bovedas haremos en la primera $M_{,}=M'$, y saldrá

$$M''Z''-M'X'-M'(z''-x')\cot.(\alpha'+f)\geqq 0 \text{ ---------- } (6)$$

En la segunda (7) supondremos primero que la junta $M'N'$ (Fig.ª 16ª) cae al mismo lado que $N_{,}M_{,}$, con lo cual el trozo M'' debe ahora llamarse M', el trozo M' convertirse en $-M_{,}$ y el tercero $M_{,}$ denominarse $M_{,,}$: hechas estas substituciones en la condicion (7) dá

$$(M'+M_{,})\cos.(\alpha'-f)-\frac{M om_{,,}.(M_{,,}-M_{,})\,\text{sen.}(\alpha'-f+\alpha_{,}-f)}{(x_{,,}-z_{,})\cos.(\alpha_{,}-f)-(y_{,,}-u_{,})\,\text{sen.}(\alpha_{,}-f)}\geqq 0,$$

y haciendo $M'=M_{,}$ tendremos $M_{,}(x_{,,}-z_{,})\cot.(\alpha_{,}-f)-M_{,,}X_{,,}+M_{,}Z_{,}\geqq 0$. ---------- (7)

La condicion (6) se refiere á impedir en las bovedas simetricas que los trozos $M'N''=M_{,}n_{,}$ (Fig.ª 16) adquieran movimiento de rotacion al rededor de los puntos N'' y $n_{,}$, impelidos por el esfuerzo que el trozo $N_{,}N'M'M_{,}$ produce resvalando sobre las juntas

$M'N'$ y M_1N_1, y sostenido al mismo tiempo por los puntos M' y M_1 de los trozos inferiores. La condicion (7) se dirige á impedir el movimiento en sentido contrario y manifestado por la fig.ª 17., en la cual los trozos inferiores $M_{11}N_1 = m'N'$ girando al rededor de los puntos M_{11} y m' empujan al del medio $M'N'N_1M_1$ para que suba con movimiento de traslacion por las juntas $M'N'$ y M_1N_1, apoyado en los puntos exteriores N' y N_1 de los trozos laterales.

50. Puestas las condiciones (6) y (7) de este modo

$$(z''-x')\left\{\frac{M''Z''}{z''}-M'\cot.(\alpha'+f)\right\}+x'\left\{\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}\right\}\geqq 0,$$

$$(x_{11}-z_1)\left\{M_1\cot.(\alpha_1+f)-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}\right\}+(k+z_1)\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1}-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}\right\}\geqq 0,$$

aparecen sus primeros miembros iguales á la suma de los terminos $\frac{M''Z''}{z''}-M'\cot.(\alpha'+f)$. y $\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}$, $M_1\cot.(\alpha_1+f)-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}$ y $\frac{M_1Z_1}{k+z_1}-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}$, multiplicados por los coeficientes $z''-x'$; x', $x_{11}-z_1$ y $k+z_1$: estos coeficientes han de ser positivos, guardando el orden que deven tener en su colocacion los trozos M_{11}, M_1 M' y M'': y los terminos $\frac{M''Z''}{z'}-M'\cot.(\alpha'+f)$, $\frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}$, &c. son funciones parecidas á los primeros miembros de las condiciones (F), (G), (M) y (N). Por consiguiente, si con respeto á los terminos contenidos en las condiciones (M) y (N) sucede lo mismo que se dijo en el n.º 33. con relacion á los de las condiciones (F) y (G), se tendrá

$$\frac{M''Z''}{z''}-M'\cot.(\alpha'+f)>0,\quad \frac{M''Z''}{z''}-\frac{M'X'}{x'}>0,\ M_1\cot.(\alpha_1+f)-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}>0,\ \frac{M_1Z_1}{k+z_1}-\frac{M_{11}X_{11}}{k+x_{11}}>0;$$

lo cual prueba que en casos semejantes los movimientos de tercera y cuarta especies quedan sofocados en el hecho de no tener lugar el puro de rotacion y los mixtos de primera y segunda especies. Baxo este concepto podemos ya asegurar que la boveda de medio punto, tal como la hemos considerado en el num.º 43, se mantendrá firme sin adquirir ninguna especie de movimiento.

51. Lo dicho en el n.º anterior prueba la inutilidad de las formulas que hay sacadas para determinar el grueso de Machones, suponiendo que estos giran al rededor

de los puntos exteriores de sus vases, impulsados por la fuerza que el trozo superior del medio produce al tiempo de resvalar por sus juntas de lecho, cuestion que es exactamente la misma que la que se contiene en la condicion (6) haciendo el trozo M'' igual al comprendido entre la clave y la vase de uno de los machones. Por desgracia en la mayor parte de los problemas dirigidos al mismo objeto que vemos resueltos en las obras sobre empuje de bovedas, se considera el trozo superior del arco con el movimiento que acabamos de mencionar; y asi es que aparecen enteramente inutiles los unicos calculos que en aquellas obras presentan á primera vista una aplicacion directa á la practica. Es verdad que M. M. Bossut, Prony, y Couplet en la primera parte de su memoria, descomponen el trozo superior en dos fuerzas que hacen pasar por medio de las juntas de rotura, con lo cual resulta el momento de las componentes contra los machones, mayor que el que nosotros venimos á considerar en la condicion (0) ó su derivada (6) refiriendo el punto N'' (fig.ª 16ª) al exterior de la vase de los estrivos; pero es facil demostrar, segun se insinuó ya en el num.º 11, que semejante proceder carece de fundamento. Porque si el objeto que se propusieron aquellos autores, era impedir que los machones girasen por el punto exterior de sus vases, y si en el instante de empezarse el movimiento, las juntas de lecho correspondientes al trozo que hace veces de potencia, se abren por la parte exterior quedando solamente sostenidas por sus extremos interiores; es evidente que el empuje no tiene otros puntos por donde comunicarse que dichos estremos, interiores, que son los unicos que unen al machon con lo restante de la boveda, y solo por ellos deben hacerse pasar las componentes de la fuerza que obra contra los estrivos.

52. En virtud de lo expuesto en este y demas capitulos precedentes se vé que la discusion completa para asegurarse de la solidez de un arco que no es simetrico, exije calculos muy largos y embarazosos por los muchos terminos y variables que contienen

las siete formulas generales (A), (C), (H), (Y) (O) (P) y (Q); y esta complicacion que por si sola es ya un verdadero obstaculo para que la aplicacion de las formulas referidas sea de un uso frecuente en la practica, nos mueve á ver como se puede en lugar de ellas subtituir otras que tengan una forma mas sencilla y expedita para todos los casos. Aquellas siete condiciones, como deducidas directamente de la teorica, manifiestan bajo la forma que tienen, cuando las bovedas se mantienen firmes y cuando se vienen abajo, segun es positivo ó negativo su primer miembro; pero si observamos que de estos dos objetos el principal que interesa mas al arte de construir, es el saber que el arco, tal cual lo proyectamos, se halla con las proporciones devidas para sostenerse, notaremos que puede muy bien haber otras condiciones mas sencillas que se dirijan solamente á manifestar esta circunstancia; y de su descubrimiento es de lo que vamos á ocuparnos ahora.

Supongamos primeramente que se obliga al arco á cumplir con las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} M'\cot.(\alpha'-f) - M''\cot.(\alpha''+f) \geqq 0, \\ M'\cot.(\alpha'-f) - M_1\cot.(\alpha_1+f) \geqq 0, \\ M''\cot.(\alpha''-f) - M_1\cot.(\alpha_1+f) \geqq 0, \\ M''\cot.(\alpha''-f) - M'\cot.(\alpha'+f) \geqq 0, \\ M_1\cot.(\alpha_1-f) - M'\cot.(\alpha'+f) \geqq 0: \end{array}\right\} \text{------} (8)$$

y desenvolviendo el primer miembro de la condicion (A) del mismo modo que se hizo en el Nº. 19, bajo las tres formas

$$a'\text{tang}.(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f) - M'\cot.(\alpha'+f)\} + c'\text{tang}.(\alpha_1+f)\{M'\cot.(\alpha'+f) - M_1\cot.(\alpha_1+f)\},$$

$$a'\text{tang}.(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f) - M_1\cot.(\alpha_1+f)\} + b'\text{tang}.(\alpha'+f)\{M_1\cot.(\alpha_1+f) - M'\cot.(\alpha'+f)\},$$

$$b'\text{tang}.(\alpha'+f)\{M''\cot.(\alpha''-f) - M'\cot.(\alpha'+f)\} + c'\text{tang}.(\alpha_1+f)\{M''\cot.(\alpha''-f) - M_1\cot.(\alpha_1+f)\},$$

se verá que la primera de estas expresiones se convierte en

$$a'\text{tang}.(\alpha''-f)\{M'\cot.(\alpha'-f) - M''\cot.(\alpha''+f)\} + c'\text{tang}.(\alpha_1+f)\{M'\cot.(\alpha'-f) - M_1\cot.(\alpha_1+f)\},$$

cambiando los signos de M'', M', α'', α' en el supuesto de estar todos los trozos en el lado izquierdo: la segunda en

$$a'\text{tang.}(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\}+b'\text{tang.}(\alpha'-f)\{M'\cot.(\alpha'-f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\},$$

cambiando solamente el signo á M' y α', ó lo que es lo mismo suponiendo que los dos trozos $M_{,}$ y M' estan en el lado izquierdo y M'' en el derecho: la tercera se mantiene en

$$b'\text{tang.}(\alpha'+f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M'\cot.(\alpha'+f)\}+c'\text{tang.}(\alpha_{,}+f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M_{,}\cot.(\alpha_{,}+f)\},$$

haciendo que conserven sus signos las cantidades M'', M', $M_{,}$, α'', α' y $\alpha_{,}$, lo que equivale á suponer que el trozo $M_{,}$ está solo en el lado izquierdo, y los otros dos en el lado derecho: y ultimamente la primera expresion vuelve á convertirse en

$$a'\text{tang.}(\alpha''-f)\{M''\cot.(\alpha''-f)-M'\cot.(\alpha'+f)\}+c'\text{tang.}(\alpha_{,}+f)\{M_{,}\cot.(\alpha_{,}-f)-M'\cot.(\alpha'+f)\},$$

mudando el signo á $M_{,}$ y $\alpha_{,}$ en el concepto de suponer que los tres trozos se hallan en el lado derecho. Como no hay mas casos que puedan ocurrir que los cuatro considerados, y en todos ellos aparece manifiestamente positivo el primer miembro de la condicion (A), siendo ciertas las propuestas (8), se sigue que con dichas condiciones queda absolutamente impedido el movimiento puro de traslacion.

53. Supongamos en segundo lugar que la boveda satisface tambien á las condiciones

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{M''Z''}{k+z''}-\dfrac{M_{,,}X_{,,}}{k+x_{,,}}>0,\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{k+z_{,}}-\dfrac{M_{,,}X_{,,}}{k+x_{,,}}>0,\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\dfrac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}>0,\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{z_{,}}-\dfrac{M'X'}{x'}>0,\\ \dfrac{M''Z''}{z''}-\dfrac{M_{,,}X_{,,}}{x_{,,}}>0,\ \dfrac{M''Z''}{z''}-\dfrac{M'X'}{x'}>0,\ \dfrac{M_{,}Z_{,}}{k+z_{,}}-\dfrac{M'X'}{k+x'}>0,\ \dfrac{M''Z''}{k+z''}-\dfrac{M'X'}{k+x'}>0.\end{array}\right\}\cdots(9)$$

Demos al primer miembro de la condicion (C) las seis formas

$$\left(\frac{a''}{x_{,,}-z_{,}}\right)\{M''Z''(x_{,,}-z_{,})-M_{,,}X_{,,}(z''-z_{,})+M_{,}Z_{,}(z''-x_{,,})\}+\left(\frac{b''}{x_{,,}-z_{,}}\right)\{-M_{,,}X_{,,}(z_{,}-x')+M_{,}Z_{,}(x_{,,}-x')-M'X'(x_{,,}-z_{,})\},$$

$$\left(\frac{a''}{x_{,,}-x'}\right)\{-M_{,,}X_{,,}(z''-x')+M''Z''(x_{,,}-x')-M'X'(x_{,,}-z'')\}+\left(\frac{c''}{x_{,,}-x'}\right)\{-M_{,,}X_{,,}(z_{,}-x')+M_{,}Z_{,}(x_{,,}-x')-M'X'(x_{,,}-z_{,})\},$$

$$\left(\frac{a''}{z_{,}-x'}\right)\{M_{,}Z_{,}(x'-z'')-M'X'(z_{,}-z'')+M''Z''(z_{,}-x')\}+\left(\frac{d''}{z_{,}-x'}\right)\{-M_{,,}X_{,,}(z_{,}-x')+M_{,}Z_{,}(x_{,,}-x')-M'X'(x_{,,}-z_{,})\},$$

$$\left(\frac{b''}{z''-x_{,,}}\right)\{-M'X'(z''-x_{,,})+M''Z''(x'-x_{,,})-M_{,,}X_{,,}(x'-z'')\}+\left(\frac{c''}{z''-x_{,,}}\right)\{M''Z''(x_{,,}-z_{,})-M_{,,}X_{,,}(z''-z_{,})+M_{,}Z_{,}(z''-x_{,,})\},$$

$$\left(\frac{b''}{z''-z_{,}}\right)\{M''Z''(x'-z_{,})-M'X'(z''-z_{,})+M_{,}Z_{,}(z''-x')\}+\left(\frac{d''}{z''-z_{,}}\right)\{M''Z''(x_{,,}-z_{,})-M_{,,}X_{,,}(z''-z_{,})+M_{,}Z_{,}(z''-x_{,,})\},$$

$$\left(\frac{c''}{z''-x'}\right)\left\{M''Z''(x'-z_1) - M'X'(z''-z_1) + M_1Z_1(z''-x')\right\} + \left(\frac{d''}{z''-x'}\right)\left\{-M_{''}X_{''}(z''-x') + M''Z''(x_{''}-x') - M'X'(x_{''}-z'')\right\},$$

que resultan de hacer desaparacer dos de las letras a'', b'', c'' y d'' por medio de las equaciones (3) del capitulo segundo; y substituyendo en la primera de las siete formas anteriores, ~~forma~~, $\frac{(x_{''}-z_1)(k+z'')}{k+x_{''}} + \frac{(z''-x_{''})(k+z_1)}{k+x_{''}}$ por $z''-z_1$ coeficiente de $M_{''}X_{''}$ en el primer corchete, y $\frac{(z_1-x')x_{''}}{z_1} + \frac{(x_{''}-z_1)x'}{z_1}$ por $x_{''}-x'$ coeficiente de M_1Z_1 en el segundo corchete; en la segunda forma, $\frac{x_{''}}{z''}(z''-x') + \frac{x'}{z''}(x_{''}-z'')$ por $x_{''}-x'$ coeficiente de $M''Z''$ en el primer corchete, y $\frac{x_{''}}{z_1}(z_1-x') + \frac{x'}{z_1}(x_{''}-z_1)$ por $x_{''}-x'$ coeficiente de M_1Z_1 en el segundo corchete; en la tercera forma, $\frac{(x'-z'')(k+z_1)}{k+x'} + \frac{(z_1-x')(k+z'')}{k+x'}$ por z_1-z'' coeficiente de $M'X'$ en el primer corchete, &c, &c; y asi por el mismo tenor en las demas formas, tendremos, por equivalentes à dicho primer miembro de (C), las ocho espresiones

$$a''(k+z'')\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\} + \frac{a''(z''-x_{''})(k+z_1)}{x_{''}-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\} + \frac{b''(z_1-x')x_{''}}{x_{''}-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\}$$
$$+ b''x'\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$\frac{a''(z''-x')x_{''}}{x_{''}-x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\} + \frac{a''(x_{''}-z'')x'}{x_{''}-x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\} + \frac{c''(z_1-x')x_{''}}{x_{''}-x'}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\}$$
$$+ \frac{c''(x_{''}-z_1)x'}{x_{''}-x'}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$\frac{a''(x'-z'')(k+z_1)}{z_1-x'}\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + a''(k+z'')\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + d''x_{''}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\}$$
$$+ \frac{d''(x_{''}-z_1)x'}{z_1-x'}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$b''x'\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\} + \frac{b''(x'-z'')x_{''}}{z''-x_{''}}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\} + \frac{c''(x_{''}-z_1)(k+z'')}{z''-x_{''}}\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\}$$
$$+ c''(k+z_1)\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\};$$

$$\frac{b''(x'-z_1)(k+z'')}{z''-z_1}\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{b''(z''-x')(k+z_1)}{z''-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{d''(x_{''}-z_1)(k+z'')}{z''-z_1}\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\}$$
$$+ \frac{d''(z''-x_{''})(k+z_1)}{z''-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{k+x_{''}}\right\};$$

$$c''(k+z_1)\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{c''(x'-z_1)(k+z'')}{z''-x'}\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{d''(x_{''}-z'')x'}{z''-x'}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\}$$
$$+ d''x_{''}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\};$$

$$\frac{a''(x'-z'')x_{''}}{x'-x_{''}}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\} + \frac{a''(z''-x_{''})x'}{x'-x_{''}}\left\{\frac{M''Z''}{z''} - \frac{M'X'}{x'}\right\} + \frac{c''(x'-z_1)x_{''}}{x'-x_{''}}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\}$$
$$+ \frac{c''(z_1-x_{''})x'}{x'-x_{''}}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M'X'}{x'}\right\};$$

$$a''(k+z'')\left\{\frac{M''Z''}{k+z''} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{a''(z''-x')(k+z_1)}{x'-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{k+z_1} - \frac{M'X'}{k+x'}\right\} + \frac{d''(z_1-x_{''})x'}{x'-z_1}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M'X'}{x'}\right\}$$
$$+ d''x_{''}\left\{\frac{M_1Z_1}{z_1} - \frac{M_{''}X_{''}}{x_{''}}\right\};$$

-siendo de advertir que la septima y octaba provienen de invertir los signos del numerador y denominador de los quebrados que multiplican las cantidades incluidas dentro de los corchetes de la segunda y tercera formas de las seis equivalentes al primer miembro de la condicion C, puestas al principio de este numero. Verificadas, pues, las condiciones (9), es evidentemente positiva la primera expresion de las ocho que acabamos de poner, cuando se tiene $x_{\prime\prime} > z_{\prime}$, $z'' > x_{\prime\prime}$, $z_{\prime} > x'$ y $x_{\prime\prime} > z_{\prime}$, esto es, cuando la relacion de desigualdad de las abcisas $x_{\prime\prime}$, $z_{\prime}$, x' y z'' está representada por la permutacion $z'' x_{\prime\prime} z_{\prime} x'$, siguiendo en esto el mismo convenio que hicimos en el num.º 30. para espresar la desigualdad de los trozos M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$: por igual razon diremos que es positiva la segunda expresion que le sigue, cuando cualquiera de las permutaciones $x_{\prime\prime} z'' z_{\prime} x'$ y $x_{\prime\prime} z_{\prime} z'' x'$ tiene lugar: la tercera expresion, cuando se verifica la permutacion $x_{\prime\prime} z_{\prime} x' z''$: la cuarta expresion con la permutacion $x' z'' x_{\prime\prime} z_{\prime}$: la quinta expresion, verificandose cualquiera de las permutaciones $z'' x_{\prime\prime} x' z_{\prime}$ y $z'' x' x_{\prime\prime} z_{\prime}$: la sesta expresion con la permutacion $x_{\prime\prime} z'' x' z_{\prime}$: la septima con $x' z'' z_{\prime} x_{\prime\prime}$, y la ultima con $z'' x' z_{\prime} x_{\prime\prime}$. Pero es necesario advertir que en las diez permutaciones que llevamos consideradas, no estan incluidas todas las relaciones de desigualdad que pueden existir entre las abcisas de los trozos M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$; y nosotros averiguariamos de un modo directo que, ademas de las diez anteriores, pueden verificarse las cuatro $x_{\prime\prime} x' z_{\prime} z''$, $x_{\prime\prime} x' z'' z_{\prime}$, $x' x_{\prime\prime} z'' z_{\prime}$ y $x' x_{\prime\prime} z_{\prime} z''$, siguiendo los mismos tramites que se emplearon en el num.º 30 para hallar las de los trozos M'', M', $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$, y haciendo notar que aunque M'' y M' esten en el lado derecho de la clave, y sea de consiguiente $M'' > M'$, puede ser en este caso z'' mayor ó menor que x', como nos convenceremos facilmente si en la fig.ª 2.ª hacemos que la junta $M'N'$ se aproxime tanto á la $M''N''$ que aquella corte á la ordenada del punto N'' antes de salir esta del espacio comprendido entre el intrados y extrados. La misma advertencia tiene lugar con respecto á las abcisas de los trozos $M_{\prime}$ y M' cuando estan en el lado izquierdo, y á las de los trozos $M_{\prime}$ y $M_{\prime\prime}$ si estos se hallan en el lado derecho: todo lo cual es causa de que el num.º de permutaciones posibles entre

las abcisas sea mayor que el de las correspondientes á los trozos.

Examinando ahora las cuatro permutaciones ultimas, notaremos que la primera $x_{\prime\prime}\, x' z_{\prime} z''$ puede verificarse de los tres modos siguientes. Primeramente, estando todos los trozos en el lado izquierdo, y entonces se tiene $c'' = -(x'-z'')(y_{\prime\prime}-y') - (x_{\prime\prime}-x')(u''-y')$, $d'' = \ldots$ $-(x'-z'')(u_{\prime}-y') - (x'-z_{\prime})(y'-u'')$, mudando los signos á las ordenadas u'' è y': donde se ve que precisamente ha de resultar negativa alguna de las cantidades c'' ó d'', segun sea u'' mayor ó menor que y'. Segundo, hallandose los trozos $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime}$ y M' en el lado izquierdo, y M'' en el derecho, y en este caso, mudando solo el signo de y', sale $d'' = -(x'-z'')(u_{\prime}+y') - (x'-z_{\prime})(u''+y')$, esto es, negativa. Tercero y ultimo, cuando el trozo $M_{\prime\prime}$ está en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho, con cuyo supuesto sale tambien negativa la cantidad $d'' = -(x'-z'')(u_{\prime}+y') - (x'-z_{\prime})(u''-y')$.

La permutacion $x_{\prime\prime}\, x_{\prime}\, z'' z_{\prime}$ puede verificarse de otros tres modos diferentes, á saber. 1º. Estando los tres trozos $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime}$ y M' en el lado izquierdo, y M'' en el derecho, y en este caso es negativa la cantidad $d'' = -(x'-z'')(y_{\prime\prime}-y') - (x'-z_{\prime})(u''+y')$. 2º Estando los dos primeros trozos en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, con lo cual se tiene $c'' = -(x'-z'')(y_{\prime\prime}+y')$ $-(x_{\prime\prime}-x')(y'-u'')$, $d'' = -(x'-z'')(u_{\prime}+y') - (x'-z_{\prime})(u''-y')$, esto es, una de ellas negativa precisamente, ya sea u'' mayor ó ya menor que y'. 3º Hallandose el trozo $M_{\prime\prime}$ en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho, y bajo este concepto sale $d'' = -(x'-z'')(y'-u_{\prime\prime}) - (x'-z_{\prime})(u''-y') =$ $-(z''-z_{\prime})(u_{\prime}-y') - (x'-z_{\prime})(u''-u_{\prime})$, con cuyas dos expresiones se vé que d'' resulta siempre negativa, tanto en el caso de ser y' mayor que $u_{\prime}$ como en el contrario.

La permutacion $x' x_{\prime\prime}\, z'' z_{\prime}$ puede reducirse á estos dos casos: ó los trozos $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime}$ estan en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, ó bien el trozo $M_{\prime\prime}$ esta solo en el lado izquierdo y los tres restantes en el derecho; y en cualquiera de estos supuestos se tiene $c'' = -(x'-z'')(y_{\prime\prime}+y') - (x'-x_{\prime\prime})(u''-y')$ que es una cantidad negativa.

La ultima permutacion $x' x_{\prime\prime}\, z_{\prime} z''$ que solamente puede verificarse hallandose los trozos $M_{\prime\prime}$ y $M_{\prime}$ en el lado izquierdo y los otros dos en el derecho, da $c'' = -(x'-z'')(y_{\prime\prime}+y') - (x'-x_{\prime\prime})(u''-y')$ que es evidentemente

una cantidad negativa como en la permutacion anterior.

Tenemos demostrado desde el n.º 53 hasta aqui, que de las catorce relaciones diferentes de desigualdad que pueden existir entre las abcisas, diez hacen positivo el primer miembro de la condicion (C) verificandose las propuestas (9), y las cuatro relaciones restantes corresponden á una situacion de trozos en que el movimiento de rotacion es imposible de efectuarse, puesto que con ellas salen precisamente algunos negativos, de los coeficientes a'' b'' c'' y d'', vease lo que diximos en el n.º 26: por consiguiente, podemos asegurar sin restriccion ninguna que ~~verificandose~~ las condiciones (9) impiden que la boveda tome el movimiento puro de rotacion.

54. Ultimamente, si ademas de las condiciones (8) y (9) tubieramos estas otras

$$\left.\begin{array}{ll} M''\cot.(\alpha''-f) - \dfrac{M'X'}{K+x'} \geqq 0, & \dfrac{M''Z''}{z''} - M_{\prime\prime}\cot.(\alpha_{\prime\prime}+f) \geqq 0, \\ M''\cot.(\alpha''-f) - \dfrac{M_{\prime\prime}X_{\prime\prime}}{K+x_{\prime\prime}} \geqq 0, & \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M_{\prime\prime}\cot.(\alpha_{\prime\prime}+f) \geqq 0, \\ \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M''\cot.(\alpha''+f) \geqq 0, & M_{\prime\prime}\cot.(\alpha_{\prime\prime}-f) - \dfrac{M'X'}{K+x'} \geqq 0, \end{array}\right\} \text{- - - -} (10)$$

nos fuera facil demostrar que los primeros miembros de las condiciones generales (H), (J), (O) (P) y (Q) eran positivos: no lo hacemos por no ser mas prolijos, y porque el camino trazado en las demostraciones hechas con respecto á las condiciones (A) y (C) nos puede servir de guia para descubrir inmediatamente el que debe seguirse en el caso presente. Asi que, dado por demostrado lo dicho; en vista de lo expuesto en los numeros 52. y 53., y observando que los tres grupos de condiciones (8), (9) y (10) pueden reducirse substancialmente á las cinco siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} M_{\prime}\cot.(\alpha_{\prime}-f) - M'\cot.(\alpha'+f) \geqq 0, \\ M_{\prime}\cot.(\alpha_{\prime}-f) - \dfrac{M'X'}{K+x'} \geqq 0, \\ \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{K+z_{\prime}} - \dfrac{M'X'}{K+x'} \geqq 0, \\ \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - \dfrac{M'X'}{x'} \geqq 0, \\ \dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}} - M'\cot.(\alpha'+f) \geqq 0, \end{array}\right\} \text{- - - - - - - -} (R)$$

Con tal que se pongan por $M_{\prime}\cot.(\alpha_{\prime}-f)$, $\dfrac{M'Z_{\prime}}{K+z_{\prime}}$ y $\dfrac{M_{\prime}Z_{\prime}}{z_{\prime}}$ los menores de los dos

minimos; y por $M'cot.(\alpha'+f)$, $\frac{M'X}{K+x'}$ y $\frac{M'X'}{x'}$ los mayores de los dos maximos, que cada una de estas seis expresiones tiene segun se refiera al lado derecho de la clave ó al lado izquierdo, sin parar ya la atencion en la diferencia que admitimos al principio de la obra entre los accentos superior é inferior de las letras; concluiremos por fin que satisfechas estas cinco condiciones de la manera espresada, quedan imposibilitados los arcos de adquirir cualquiera especie de movimiento.

55 Aqui vemos que las condiciones (R) se reducen á las mismas que hallamos con todo rigor para el caso de ser el arco simetrico, y esta coincidencia prueba que dichas condiciones reunen á una forma sencilla y de facil discusion, la circunstancia apreciable de apartarse lo menos posible de las primitivas que dá directamente la consideracion del movimiento. Tambien por medio de las mismas condiciones (R) estamos ya en disposicion de averiguar facilmente el mayor peso que puede pasar por el estradós de un arco, sin que este se venga abajo: problema que, apesar de suponer simetrica la boveda, no podria resolverse antes de la simplicacion admitida sino empleando las condiciones (A) (C) (H) (I) (O) (P) y (Q) con toda su generalidad. Esta investigacion se reduce á substituir primero en los terminos $M'cot.(\alpha'+f)$, $\frac{M'X'}{K+x'}$ y $\frac{M'X'}{x'}$ por M' y $M'X'$ respectivamente las cantidades $M'+P$ y $M'X'+Py'$, dando á entender por P el peso en cuestion, y considerando el mayor momento que puede tener este: á igualar, despues de hecha la substitucion anterior, á cero los primeros miembros; y despejando la incognita P de las equaciones resultantes, á tomar finalmente por valor de P el menor de los minimos de los segundos miembros. No nos detenemos en hacer aplicacion de esta doctrina á ningun exemplo, por que la discusion no presenta dificultad alguna, ni observaciones nuevas que merezcan atencion.

Capitulo cuarto.

Aplicacion de la doctrina expuesta en los capitulos anteriores à la determinacion del grueso de Machones

56. Habiendo tratado en los capitulos precedentes de las condiciones necesarias para sofocar los mutuos esfuerzos que se hacen las dovelas, nos toca en este, afin de completar nuestra teorica, determinar los gruesos que deben tener los machones para poder resistir al empuje total del arco. Con el objeto de desembarazarnos de algunas complicaciones de calculo, consideraremos solamente las bovedas simetricas; y en este concepto no nos corresponde discutir aqui mas movimientos que los concevidos en las formulas (B),(F) y (M); y aun de estos tres descartaremos el puro de traslacion que rarisima vez tiene lugar à causa del rozamiento.

57. Cuantos Autores han tratado de dar formulas para determinar el grueso de estribos; otros tantos desenvuelven sus calculos valiendose de dos supuestos tan falsos como perjudiciales à la solidez de las bovedas. Primeramente consideran cada pie derecho formado de un solo trozo de piedra, y de consiguiente capaz de oponer al tiempo de volcarse una resistencia mayor de la que tiene realmente. En segundo lugar, suponen que todas las dovelas rematan en el extrados, lo que no sucede asi generalmente, pues cuando este se halla formado de una linea recta horizontal, que es el caso mas comun, entonces las dovelas son al poco mas ó menos iguales à la clave, y el extrados resulta de llenar de mamposteria el interior, y de silleria el exterior de los riñones del arco, esto es, el espacio que queda entre las cabezas de las dovelas y la linea horizontal que forma el extrados. Aunque el ultimo supuesto no ocasiona errores de tanta trascendencia como el primero, no por eso lo admitiremos en nuestras discusiones; y bajo este sentido empezaremos ya à tra-

tratar de ver como se puede determinar la verdadera resistencia que oponen los machones, y el empuje que contra ellos produce el arco en cada uno de los movimientos á que se refieren las condiciones (F) y (M), advirtiendo antes de todo que partimos de un principio que nos vá á servir de guia en los raciocinios que emplearemos en adelante. Se reduce á suponer todos los sillares de un mismo tamaño, y situados de forma que sus juntas verticales de lecho correspondan al medio de las horizontales de los sillares inferior y superior mas inmediatos: pues en efecto, esto es lo que en buena construccion se trata de satisfacer en cuanto lo permiten los materiales.

58. Empezando, pues, por la condicion (F), correspondiente al movimiento puro de rotacion, lo primero que vamos á hallar es la forma de la expresion representada por la letra M; bajo una junta de lecho conocida, y suponiendo que el extrados es una recta horizontal. Con esta mira considerese que el arco A M, figura (21), haciendo bajar su vertice, adquiere un pequeño movimiento de rotacion al rededor del punto M; y es evidente que todos los sillares que arrastren consigo las dovelas contenidas en el arco A M, deverán entrar á formar juntamente con estas la expresion de M' y de su momento M'X'. Que M m 1. 2. 3. 4. 5. 6. n sea la grieta aparecida de resultas del movimiento, dando á conocer por el lado derecho los sillares que permanecen unidos á la parte inmovil de la boveda, y por el izquierdo los que acompañan al arco A M en su movimiento, no admite la menor duda si se advierte que de este modo ninguno de los sillares 2.9, 4.8, 6.7 mas contiguos á la grieta se halla en aptitud de desplomarse y salir de su asiento, á causa de pasar justamente el centro comun de gravedad de cada uno de estos sillares y de los que podria llevar consigo, por el mismo punto que deviera servirles de apoyo en caso de rodar; y dicha circunstancia dexa de verificarse con cualquiera otra figura y direccion que tenga la rotura.

Una vez marcados los sillares que entran á determinar la superficie que representa la letra M'; y por lo tanto la expresion de $\frac{M'X'}{k+x'}$ segundo termino de la condicion; es facil conocer que el valor de $\frac{M''Z''}{k+z''}$, primer termino de la misma, tiene que ser igual al momento, tomado en el punto J, de la superficie A C E J G B menos el de E e. 1.e'. 2.e. 3.e'. 4.e. 5.e' E, dividido todo por la altura J G que en este problema es el valor de k+z'': por que es bien patente que los sillares contenidos en la ultima superficie que se resta, se hallan incapaces de acompañar á los demas que componen el Machon, en el movimiento de rotacion que al rededor del punto J trata de comunicar á los estrivos el empuje del arco A M n B, y por lo mismo no pueden entrar en el calculo para medir la resistencia que los Machones oponen á dho empuje.

59. Suponiendo, ahora, que tanto las dimensiones de las dovelas como las de los sillares son infinitamente pequeñas en comparacion de la magnitud del Arco, se podra poner sin error substancial por M' la superficie A M N B A (Fig.ª 22) y por M'' el espacio A C e J G B A; M N y J e siendo dos rectas que formen con la vertical el angulo m M N = E e J, cuya tangente sea igual á la mitad de la longitud ó vase de un sillar, dividida por la altura de este: la primera linea tirada desde el punto M del intrados hasta encontrar el extrados, y la segunda desde el punto J de rotacion del machon hasta tocar con su lado vertical E C interior. Con esto es facil ver que cuanto menor se haga la relacion entre la longitud y altura de los sillares, tanto menor será la resistencia que opongan los machones, y mayor el empuje del Arco A M N B A: por que el triangulo E J e y el momento de la superficie A M N B A, tomado en el punto M, aumentan al paso que las lineas M N y J e se acercan mas á la vertical. La relacion entre la longitud y altura de los sillares puede crecer sin limites hasta el infinito, y en este caso los machones obraran del mismo modo que si estubieran formados de un solo

trozo de piedra; pero el limite de los decrementos de dicha relacion no puede ser nulo, sino igual por lo menos á la unidad. La razon de esto ultimo es bien clara, por que los sillares, cualesquiera que sean sus dimensiones, han de ser precisamente rectangulares ó cuadrados: si lo primero, con ordenarlos de suerte que el lado mayor sirva de asiento y el menor de altura; como asi se hace en efecto cuando se siguen las reglas de buena construccion, tendremos la relacion de estas cantidades mayor que 1: y si sucede lo segundo, esta relacion será constantemente igual á la unidad, sea el que fuere el lado elegido para servir de vase ó de altura. Como la mayor parte de obras se suelen construir de mamporteria que admite piedras de diferentes dimensiones, sin guardar en su colocacion tanto orden ni simetria como la silleria, con la que solo se revisten, cuando mas, las partes exteriores y visibles; será lo mas prudente caminar en estas investigaciones bajo el supuesto menos favorable á la resistencia de los estrivos, esto es, suponer que las lineas MN y Fe forman con la vertical el angulo cuya tangente $= \frac{1}{2}$ del radio: lo que viene á ser lo mismo que hacer cuadradas las caras de los sillares, ó de las piedras que componen la mamporteria.

60. Pero considerando, segun el convenio acabado de hacer, que el triangulo FeE, (Fig.ª 22), cuyo momento ha de restarse de el de toda la superficie $ACEFGB$ para igualar la resta á $M''Z''$, tiene por altura el duplo de la vase EF del machon, la condicion $\frac{M''Z''}{K+Z''} - \frac{M'X'}{K+X'} \geqq 0$ solo puede servir para determinar esta vase, cuando no haya necesidad de hacer el grueso EF mayor que $\frac{1}{2}$ CE. En efecto, siempre que para resistir el empuje del arco, sea preciso dar á la vase EF un valor mayor que $\frac{1}{2}$ CE, el machon no puede en este caso obrar exactamente de la manera considerada en el num.º anterior: porque la linea Fe, tirada desde el punto F, y que separa la parte muerta del machon de la que se opone el empuje del arco, no cortará ya á la linea CE entre los puntos C y E que señalan los limites del pié derecho, sino solamente á su prolongacion que para el asunto es una linea imaginaria.

Asi es que si la boveda, siendo C F mayor que $\frac{1}{2}$ CE, se halla con fuerza suficiente para hacer volcar al machon, este debe ya abrirse y moverse de uno de los dos modos que vamos á exponer, diversos del que conviene al caso de ser C F menor que $\frac{1}{2}$ C E.

61 El rozamiento que padecen las juntas verticales de los sillares que descansan inmediatamente sobre la linea C D, (fig.ª 23), producido por el empuje horizontal del arco A M N B A, puede ser mayor ó menor que la fuerza de gravedad que los solicita para descender: si se verifica lo primero, permaneciendo inmovil la superficie C H F E que queda á la izquierda de la linea F H tirada desde F hasta encontrar la orizontal C D que pasa por el arranque, y de forma que se tenga $DF = 2 \times DH$; la parte restante M C H F G N M tomara el movimiento de rotacion, apoyada en el punto F, como si realmente fuera compuesta de un solo trozo de piedra, por que aunque los sillares superiores á la hilada C D se hallen sin vase durante el movimiento dicho, tambien es cierto que no pueden ser impelidos á vajar resvalando por sus juntas verticales de lecho sin ir contra el supuesto admitido. Si se verifica lo segundo, debe suponerse, ademas del movimiento considerado en la superficie M C E F G N M, que los sillares incluidos en el espacio M C H f N M vajan verticalmente resvalando sin abandonar la base fixa C H, á medida que el movimiento de rotacion producido al rededor del punto F intenta separarlos de ellas: f F siendo prolongacion de la H F hasta encontrar el extrados, si antes no corta á la M N, pues en caso de cortar á esta antes que al extrados, bien se dexa conocer la figura que tendria la superficie M C H f N M. La primera hipotesis se considera substituyendo desde luego en la condicion propuesta por M″Z″ el momento de B G F H C A B tomado en el punto F, y por M′X′ lo que ya se ha manifestado en el num.º 58, pero esta hipotesis no puede verificarse si no en arcos mucho mas rebajados que los que se usan comunmente en la practica; por cuya razon no hablaremos mas de ella. Queda, pues, la segunda hipotesis por unica aplicable; y como viene acompañada de otros movimientos diversos del que se llevó en cuenta al tratar de la formula correspondiente al puro de rotacion, nos es preciso para su completa consideracion resolver antes

la cuestion siguiente.

62. Sean $A'D'B'C'$ y $A''D''B''C''C'B'D'A''$ dos superficies (fig.ª 24) que teniendo los puntos comunes de contacto representados por lineas alternativamente horizontales y verticales en forma de escalónes, se hallen sostenidas à distintas alturas, y solicitadas por una fuerza aplicada al punto M, cuyo objeto es hacer girar à la superficie $A''B''$ al rededor del punto B''; y supongamos que de resultas de este movimiento la primera superficie $A'B'$ gira por el punto B' resvalando ademas à lo largo del suelo de sostenida en dicho punto B', à fin de que los lechos verticales de ambas superficies permanezcan sin abrirse, y solo varien de puntos de aplicacion. Llamemos P la fuerza referida; P' y P'' sus componentes horizontal y vertical; R' y R'' las superficies $A'D'B'C'$ y $A''D''B''C''D'A''$; x' y x'' las distancias de los puntos B' y B'' à las verticales que pasan respectivamente por los centros de inercia de dichas superficies; y hagase ademas, $MC'=h'$; $B''f=h''$, $B'C'=v'$; $B''C''=v''$. En el punto $\underline{a}$ en que la direccion de P corta à la vertical que pasa por el centro de gravedad de la superficie $A'B'$, unamos el peso de esta superficie à la fuerza P, y produciran la resultante αQ que descompondremos en las dos OR y OS, desde un punto O de su direccion tal, que la primera componente forme con el horizonte el angulo λ, la segunda el angulo λ' con la vertical y pase ademas por el punto B'. De este modo tendremos

$$OR=\frac{P'-(R'+P'')\,tang.\lambda'}{\{1-tang.\lambda\, tang.\lambda'\}\cos.\lambda},\quad OS=\frac{R'+P''-P'tang.\lambda}{\{1-tang.\lambda\, tang.\lambda'\}\cos.\lambda'};$$

no teniendo considerar de estas dos fuerzas mas que la primera, pues la OS queda destruida con el hecho de hacerla pasar por el punto B'. El momento de OR, con respecto al punto B'', = Mom. OQ + Mom OS; el brazo de palanca de $OS = v''\cos.\lambda' - h'\,sen\,\lambda'$; el momento de OQ = Mom. aP − Mom. $R' = P'(h'+h'') - P''(v'+v'') - R'(x'+v'')$: luego Mom. $OR = P'(h'+h'')$ $-P''(v'+v'') - R'(x'+v'') + \left\{\frac{v''-h''tang.\lambda'}{1-tang.\lambda\, tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'tang.\lambda)$: cantidad que restada de $R''x''$, momento de la superficie $A''B''$, da la condicion

$$R''x''+R'(x'+v'')+P''(v'+v'')-P'(h'+h'')-\left\{\frac{v''-h''tang.\lambda'}{1-tang.\lambda\, tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'tang.\lambda)\geqq 0, \text{---} (1)$$

para expresar que no tiene lugar el movimiento en cuestion.

Resta ahora averiguar los valores de las cantidades λ y λ' que aparecen indeterminadas. El objeto

mismo del problema nos indica que desemos darles aquellos valores que conviertan en un maximo á la expresion $\left\{\frac{y''-h''\tang.\lambda'}{1-\tang.\lambda\tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'\tang.\lambda)$, y la naturaleza del rozamiento nos obliga á hacerlas mayores que los angulos correspondientes á la friccion que sufren el punto B' en la base de, y las juntas verticales comunes á las superficies A'B' y A''B'', para que el movimiento pueda verificarse tal como se ha propuesto en caso de ser negativo el primer miembro de la condicion (1). Por otra parte, los angulos λ y λ' tienen que ser respectivamente menores que los formados por la resultante OQ con los planos horizontal y vertical, á fin de que la descomposicion pueda efectuarse de la manera indicada, sin que ninguna de las componentes aparezca con signo negativo, el cual no tiene aqui lugar. Llamando, pues, f el angulo del rozamiento que existe en las juntas verticales comunes á las superficies R' y R'', y haciendo nulo el de la base de, tanto para mayor sencillez de la cuestion, como por que deve realmente aparecer casi nulo á causa de ser engendrado por un movimiento mixto que siempre debilita considerablemente su efecto; se tendrá en virtud de todas estas consideraciones $\tang.\lambda > \tang.f$, $\tang.\lambda' > 0$, $\tang.\lambda < \frac{R'+P''}{P'}$; $\tang.\lambda' < \frac{P'}{R'+P''}$. Si observamos que en la expresion $\left\{\frac{y''-h''\tang.\lambda'}{1-\tang.\lambda\tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'\tang.\lambda)$, diferenciada con respeto á una de las indeterminadas λ y λ', é igualada despues á cero, no queda termino ninguno funcion de la cantidad que ha hecho de variable, y que por lo tanto es imposible determinar su valor por medio de la equacion resultante; inferiremos de aqui que la expresion $\left\{\frac{y''-h''\tang.\lambda'}{1-\tang.\lambda\tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'\tang.\lambda)$ no tiene maximo teorico con respecto á las variables λ y λ', y que crece sin interrupcion al paso que estas aumentan ó disminuyen. Luego tomando por valor de las cantidades λ y λ' sus limites, esto es, los segundos miembros de las cuatro condiciones acabadas de poner, estas substituciones produciran en la expresion $\left\{\frac{y''-h''\tang.\lambda'}{1-\tang.\lambda\tang.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'\tang.\lambda)$ otros tantos valores, uno de los cuales será el mayor que puede dar esta cantidad. De las cuatro condiciones arriba dichas sacamos: 1.º $\tang.\lambda=\tang.f$, y $\tang.\lambda'=0$: 2.º $\tang.\lambda=\tang.f$, y $\tang.\lambda'=\frac{P'}{R'+P''}$: 3.º, $\tan\lambda=\frac{R'+P''}{P'}$, y $\tang.\lambda'=0$: 4.º, $\tang.\lambda=$

$\frac{R'+P''}{P'}$, y $\tan g.\lambda' = \frac{P'}{R'+P''}$; y estos cuatro valores trasforman á $\left\{\frac{y''-h''\tan g.\lambda'}{1-\tan g.\lambda \tan g.\lambda'}\right\}(R'+P''-P'\tan g.\lambda)$ en $y''(R'+P'')-y''P'\tan g.f$, $y''(R'+P'')-h''P'$, o, y $y''(R'+P'')-h''P'$: asi pues, despreciando el tercero por nulo, y el cuarto por ser equivalente al segundo, tendremos substituidos los dos restantes en la condicion (1), la primera ó ultima de estas

$$R''x''+R'(x'+x'')+P''(y'+y'')-P'(h'+h'')-y''(R'+P'')+h''P' \gtreqless 0,$$

$$R''x''+R'(x'+x'')+P''(y'+y'')-P'(h'+h'')-y''(R'+P'')+y''P'\tan g.f \gtreqless 0,$$

segun fuere $y''(R'+P')-h''P'$ mayor ó menor que $y''(R'+P'')-y''P'\tan g.f$, quiero decir, se usará de la primera condicion si $h'' < y''\tan g.f$, y de la segunda en el caso contrario: pues de este modo se elije la condicion mas dificil de verificarse. Estas dos condiciones, borrando los terminos iguales y de signo contrario, pueden ponerse bajo la forma

$$R''x''+R'x'+P''y'-P'h' \gtreqless 0, \text{---------------} (2)$$

$$R''x''+R'x'+P''y'-P'(h'+h''-y''\tan g.f) \gtreqless 0. \text{---------} (3)$$

Es preciso advertir, para no exponernos á hacer un mal uso de estas formulas, que si el rozamiento es mayor que $\frac{R'+P''}{P'}$, no puede entonces efectuarse la descomposicion de la fuerza a Q, de forma que satisfaga á las condiciones $\tan g.\lambda > \tan g.f$, y $\tan g.\lambda < \frac{R'+P''}{P'}$, pues estas son incompatibles bajo el supuesto de ser $\tan g.f > \frac{R'+P''}{P'}$, ó bien $P'\tan g.f > R'+P''$. Por cuya razon, para resolver el problema en casos semejantes, deve emplearse otro proceder diferente del que hemos seguido: esto es, se formará inmediatamente el momento de a Q con respecto al punto B'', que es $= P'(h'+h'')-P''(y'+y'')-R'(x'+x'')$, y se restará de $R''x''$, de la misma suerte que si las dos superficies $A'B'$ y $A''B''$ formaran un solo cuerpo, por que en efecto el ser $\tan g.f > \frac{R'+P''}{P'}$ indica que deven continuar unidas y sin resvalar por las juntas de lecho comunes á las dos. Por esta causa diximos en el num.º 61. que la solucion del caso referido se hallaba contenida inmediatamente en la formula $\frac{M''Z''}{k+z''}-\frac{M'X'}{k+p'} \gtreqless 0$ correspondiente al movimiento puro de rotacion. Aqui vemos mas palpablemente que en las demas cuestiones, como la simple

inspeccion de las condiciones nacidas de la naturaleza del rozamiento y del problema, nos proporciona no solo la formula conveniente, si no tambien los limites hasta donde deven extenderse sus aplicaciones; y esta falta de continuidad que se nota en la solucion de un mismo problema, da á la friccion el caracter propio que le pertenece, ~~y el que~~ á las fuerzas puramente pasivas. ~~y este dexaria enteramente de manifestar-se~~ en el calculo, si se tratase aquella como una verdadera fuerza activa.

63 Si entre medias de las superficies $A'B'$ y $A''B''$ concevimos un espacio $B'D'hfH$ que los separe (Fig.ª 25), formado por columnas oblicuas é infinitamente delgadas, y cuyos puntos de contacto, ó sean juntas de lecho tengan exactamente la misma figura que las de las superficies $A'B'$ y $A''B''$; veamos en este caso la alteracion que padecen las formulas anteriores, teniendo en consideracion la resistencia producida por dicho intermedio contra la fuerza OR que es la sola componente de $a\,2$ que deve tenerse presente segun lo dicho en el problema pasado, y suponiendo que cada columna adquiere dos movimientos, por exemplo la $-1_s s' 4'$, el uno de rotacion alrededor del punto extremo $4'$ de su base, y el otro de traslacion á lo largo del suelo que la sostiene en direccion de t' hacia H, y apoyada en el mismo punto $4'$ de suerte que los lechos verticales de todas resvalen unos sobre otros sin abrirse. Llamemos V lo que viene á ser la fuerza OR, despues de haber padecido la resistencia de las columnas contenidas en una base $B'4 = t$ cualquiera, T la area $B'ts h D'$ que componen estas columnas, y d la distancia $B'H$ que separa las dos superficies primitivas $A'B'$ y $A''B''$, conservando todas las demas denominaciones de la cuestion anterior. Es claro que tanto T como V seran funciones de t, y de consiguiente el momento de la fuerza V, al pasar t á ser $t + dt$, se habra convertido en $Mom.\ V + d\ Mom.\ V$, siendo $s\,4\,4's'$ la columna infinitamente pequeña que hace producir con su peso esta alteracion, y $44' = dt$ su base. La fuerza V que deve siempre conservarse con una direccion constante é igual á la que tiene OR, quiero decir, formando con el horizonte el angulo λ, al encontrar la vertical que pasa por el centro de inercia de la columna $s\,4\,4's' = dT$, se une con el peso dT de esta columna, y las dos fuerzas V y dT producen una resultante que descompondremos, desde

el punto en que su direccion encuentra á la vertical que pasa por t, en otras dos de forma que siendo la una paralela á V, pase la otra por el punto t' y sea de consiguiente perpendicular á $B'H$. Esta ultima componente sale $= \partial T$; y se equilibra con la resistencia de la base $B'H$, tanto con respecto al movimiento de traslacion por ser perpendicular á $B'H$, y haberse supuesto nulo el rozamiento en dicha vase, como con respecto al movimiento de traslacion á causa de pasar su direccion por el mismo punto t' de apoyo de la columna $s t s' t'$. La primera componente, la unica que se deve producir efecto contra el el espacio $t' s' f H$ y la superficie $A'' D'' B'' C''$ que quedan, resulta $= V$, y su momento con relacion al punto $B'' = Mom. V - Mom. \partial T + (d + r'' - t) \partial T$, expresando por $Mom. V$ el momento que tiene la fuerza V antes de unirse con el peso ∂T. Si pasamos $Mom. V$ al primer miembro de la equacion, este miembro podra expresarse por $\partial Mom. V$, y tendremos $\partial Mom. V = - Mom. \partial T + (d + r'' - t) \partial T = - \partial Mom. T + (d + r'' - t) \partial T$, é integrando

$$Mom. V = constante - Mom. T + \int (d + r'' - t) \partial T.$$

Por el problema del num.º 62 se saca, notando que aqui es $d + r''$ lo que alla era r'',

$$Mom. V = P'(h' + h'') - P''(d + r' + r'') - R'(d + r' + r'') + \left\{\frac{d + r'' - h'' tang. \lambda'}{1 - tang. \lambda \, tang. \lambda'}\right\} (R' + P'' - P' tang. \lambda),$$

cuando $t = 0$ y $T = 0$, pues en este caso el momento de V es el mismo que el de OR: con que la integral completa anterior será

$$Mom. V = P'(h' + h'') - P''(d + r' + r'') - R'(d + r' + r'') + \left\{\frac{d + r'' - h'' tang. \lambda'}{1 - tang. \lambda \, tang. \lambda'}\right\} (R' + P'' - P' tang. \lambda)$$
$$- Mom. T + \int (d + r'' - t) \partial T,$$

haciendo que $\int (d + r'' - t) \partial T$ empieze desde $t = 0$, y tome todo su valor cuando $t = B'H$. Conocido ya el valor de $Mom. V$ se restará de $R'' r''$, momento de la superficie $A'' B''$, y substituyendo por $\left\{\frac{d + r'' - h'' tang. \lambda'}{1 - tang. \lambda \, tang. \lambda'}\right\} (R' + P'' - P' tang. \lambda)$ los dos valores hallados en el num.º 62, que aqui se convierten en $(R' + P'')(d + r'') - P' h''$, y $(R' + P'')(d + r'') - P'(d + r'') tang. f$, se tendran finalmente las condiciones

$$R'' r'' + R' r' + P'' r' - P' h' + Mom. T - \int (d + r'' - t) \partial T \geqq 0, \text{ - - - - - - - - } (4)$$

$$R'' r'' + R' r' + P'' r' - P'(h' + h'' - d\, tang. f - r'' tang. f) + Mom. T - \int (d + r'' - t) \partial T \geqq 0. \text{ - - - - } (5)$$

64. Para aplicar estas formulas al caso que dejamos pendiente en el num.º 61, y expresado en la Fig.ª 23, hemos de advertir que en esta figura, las superficies MCOM, FGfF y CHfNOC ocupan con respecto al empuje del arco AMNBA el mismo lugar, y exercen las mismas funciones que en la fig.ª 25. las superficies A'B', A''B'' y B'D'hfH con relacion á la fuerza P supuesta aplicada en el punto M. Asi que, llamando m la montea AL del arco (Fig.ª 23), l su semiluz LC, h la altura CE del machon, y su grueso CD = EF = v, tendremos para las formulas (4) y (5), $h'=m-x'$, $h''=h$, $v'=l-y'$, $d=v-\frac{1}{2}h$, $v''=\frac{1}{2}h$. y continuando en representar por R', R'', T las superficies MCOM, FGfF, CHfNOC; por r', r'', las distancias de las verticales que pasan respectivamente por los centros de gravedad de las dos primeras superficies, á los puntos C y F, quedaran dichas formulas trasformadas en

$$R''r''+R'r'+P''(l-y)-P'(m-x')+Mom.T-\int(v-t)\partial T \geqq 0,$$

$$R''r''+R'r'+P''(l-y')-P'(h+m-x'-v\,tang.f)+Mom.T-\int(v-t)\partial T \geqq 0.$$

Hemos dicho, (vease el num.º 62) que P' y P'' son las componentes horizontal y vertical de la fuerza que solicita al sistema en las Fig.s 24 y 25: luego aqui sera $P'=\frac{M'X'}{k+x'}$, $P''=M'$, puesto que $\frac{M'X'}{k+x'}$ y M' son las componentes horizontal y vertical del empuje que hace contra los machones el arco AMNB = M'. Substituidos estos valores en las condiciones ultimas, y llamando $M''Z''=$ $R''r''+R'r'+R'v+Mom.T+P''(v+l-y')+P'(k+x')$ el momento de toda la superficie AMCHFGBA, tomado en el punto F, hallaremos

$$M''Z''-P'(k+m)-(R'+P'')v-\int(v-t)\partial T \geqq 0, \text{ - - - - - - - - - - (6)}$$

$$M''Z''-P'(k+m+h)-(R'+P''-P'tang.f)v-\int(v-t)\partial T \geqq 0. \text{ - - - - (7)}$$

65. Las condiciones (6) y (7) estan sacadas con todo rigor y exactitud, á fin de que ~~aquien no le asusten complicaciones~~ ~~el que quiera pasar por toda especie de complicaciones~~, pueda aplicarlas

sin restriccion alguna ~~á la practica~~ aquel á quien no le arredran complicaciones; pero nosotros, en el concepto de que á ~~esta~~ la practica no le interesa tanto la exactitud escrupulosa, cuando trae consigo largos y penosos calculos, como el que las formulas se presenten faciles y sencillas en su discusion, siempre que los supuestos admitidos para reducirlas á este estado redunden en favor de la solidez; hemos por ultimo convenido, para simplificarlas algun tanto, en hacer las suposiciones siguientes que tienen el requisito mencionado, y pueden muy bien admitirse por no separarse mucho de la verdad. Primero, suponemos, cualquiera que sea el arco A M, que se confunde con otro parabolico de igual abcisa y ordenada que el. Segundo, despreciamos en el valor del trozo M', que por lo dicho en el num.º 59. es igual á la superficie A M N B, y de consiguiente tambien en el valor de su momento, el triangulo M m N: siendo la M m una recta vertical tirada desde el punto M que determina la magnitud del arco A M, hasta encontrar al estrados X. Tercero, la cantidad que expresa la letra R', es la superficie M C O M incluida entre el arco M C, la junta M N de rotura y la C O paralela á' T f: esta linea, por el supuesto admitido en el num.º 59., forma con la vertical el angulo G T f = 26.º 34'; pues tangente de G T f = $\frac{1}{2}$; y asi, para que la C O no atraviese el arco M C, y la cantidad R' no represente una figura quimerica, dicha linea C O deverá tirarse desde el punto C de arranque, cuando la tangente del arco en este punto forme con la vertical un angulo mayor que 26.º 34'; pero no verificandose esta circunstancia se tomará en el arco M C un punto ~~cuya tangente~~ sea paralela á' T f, y su prolongacion hasta encontrar la M N terminará el perimetro de la superficie representada por R': y finalmente no pudiendo caer dicha tangente entre los puntos M y C sino mas arriba del primero, en este ultimo caso será nula la superficie en cuestion. Como en la mayor parte de bovedas escarzanas, la posicion de la junta M N que

produce el mayor empuje, se confunde con el Arranque C; por lo que deve tenerse $R'=0$; y en las semielipticas viene á estar dicha punta situada de forma que hace con la vertical un angulo de 60 grados, al poco mas ó menos, circunstancia que influye para que la cantidad R' sea muy pequeña; determinamos en virtud de estas consideraciones hacer $R'=0$ para todos los casos y asi simplificamos muchisimo las formulas, sin apartarnos sensiblemente de la verdad. Cuarto, caminando en el supuesto de ser $R'=0$ y para tener una espresion comoda de $\int(r-t)\partial T$, en cuya integral deve ∂T espresar los elementos de la superficie $CHfNOC$ paralelos entre si y á la linea Hf; substituiremos por dicha superficie el paralelogramo Hh el que resulta de tirar la horizontal Mh por el punto M hasta encontrar con los lados CO y Hf: con esto; la integral completa de $\int(r-t)\partial T=\int(r-t)(m-x')\partial t=(m-x')\int(r-t)\partial t=\frac{1}{2}(m-x')(2rt-t^2)=\frac{1}{2}(m-x')(r^2-\frac{1}{4}h^2)$, haciendo $t=CH=r-\frac{1}{2}h$, que es el mayor valor de t. Quinto, por lo dicho en el supuesto tercero de que la junta de rotura MN se confunde con el Arranque en los arcos escarzanos, y en los de medio punto y semielipticas está situada á los 60 grados, se deduce que el espacio $MmnC$ es cero en los primeros y muy pequeño en los segundos; y en atencion á esto despreciaremos dicho espacio al estimar analiticamente el momento de la superficie $AMCHfGBA$ que fue expresado por $M''Z''$. Con arreglo á las simplificaciones que hemos manifestado, se tendrá pues

$$M''Z''=\frac{1}{2}r^2(k+m)+P''r+P''(l-y')+P'(k+x)+\frac{1}{24}h^3,$$

$$P''=M'=ky+\frac{1}{3}xy,\ P'=\frac{M'X'}{k+x'}=\frac{y^2(6k+x)}{12(k+x)},\ R'=0,\ \int(r-t)\partial T=\frac{1}{2}(m-x)(r^2-\frac{1}{4}h^2);$$

y substituidos estos valores en las formulas (6) y (7), cuidando de poner para mayor comodidad por $ky+\frac{1}{3}xy$, é $\frac{y^2(6k+x)}{12\cdot(k+x)}$ las letras P'' y P' ~~[illegible]~~, nos resultará

$$r\geq\sqrt{\frac{2P'(m-x)-2P''(l-y)}{k+x}},\ \text{-------------------}\ (S)$$

$$\frac{1}{2}r^2(k+p)+rP'\tang f-P'(m-x)+P''(l-y)-P'h+\frac{1}{8}h^2(m-x)+\frac{1}{24}h^3\geq 0.\ \text{-----}\ (T)$$

66. Es de notar que en la condicion (S) que proviene de la (6), no se ponen los terminos

$\frac{1}{8}(m-x)h^2+\frac{1}{24}h^3$ que aparecen despues de hechas las substituciones anteriores, por que siendo positivos y funciones de h, variable que puede tener todos los valores imaginables desde cero hasta la altura total de los machones, á causa de estar estos formados por un numero infinito de hiladas ó capas horizontales, cuyos extremos exteriores son capaces de servir de otros tantos puntos de apoyo para girar el pie derecho; devemos dar á dicha variable h aquel valor que haga mas dificulto- la epistepsia de la la condicion, y desde luego se ve que ninguno como $h=0$ llena mejor el objeto. No sucede lo mismo en la condicion (T) con los terminos funciones de h, los que solamente pueden despreciarse en el caso de ser realmente nula la altura de los machones; pero en cambio de esto hay un valor de h que reduce la expresion $-P'h+\frac{1}{8}h^2(m-x)+\frac{1}{24}h^3$ á un minimo, y es $h=-(m-x)+\sqrt{8P'+(m-x)^2}$: de suerte que no se substituirá en la condicion (T) por h otro valor que este, siendo la altura total del machon mayor que $-(m-x)+\sqrt{8P'+(m-x)^2}$; y solo en el caso contrario deverá ponerse dicha altura total por valor de h. Aqui empezamos ya á entrever la diferencia de resultados que pueden dar nuestras formulas comparadas con las conocidas hasta ahora: en estas ultimas, como que solo entran funciones lineales de h, el mayor grueso de machones corresponde siempre á su mayor altura; pero observando las nuestras, se nota que en muchas bovedas puede haber entre medias de la altura de los estrivos, puntos mas deviles y dispuestos á abrirse que la misma base de ellos, lo cual es lo mismo que acredita la experiencia, pues no siempre que se arruina un arco por falta del competente grueso en los pies derechos, giran estos apoyados en los puntos mas bajos ó cercanos á la base.

67. Como en virtud de lo que llevamos expuesto desde el num.° 60, las formulas (S) y (T) son solamente aplicables al caso de ser $v>\frac{1}{2}h$, nos falta poner á continuacion de ellas la correspondiente al caso contrario, quiero decir, la discutida en el n.° 58. Substituyendo, pues, en aquella condicion por $M''Z''$ el momento de la superficie AMCeFSBA (fig.a 22), que es igual á $-\frac{2}{3}v^3+\frac{1}{2}v^2(k+m+h)+P'(k+x)+P''v+P''(l-y)$, segun los supuestos admitidos en el nume-

ro 65, tendremos la formula siguiente.

$$-\tfrac{2}{3}v^3+\tfrac{1}{2}v^2(k+m+h)+vP''+P''(l-y)-P'(m-x)-P'h \geqq 0, \text{ - - - - - - - - - } (V)$$

para determinar, como llevamos dicho, el valor de V cuando los machones no necesitan tener un grueso mayor que la mitad de su altura.

68. Desde luego se dexa conocer que en la discusion de las formulas (S), (T) y (V) debe hallarse la posicion de la junta MN que determina al mismo tiempo el valor de las coordenadas x é y del punto M, igualando á cero la diferencial del primer miembro de cada una de ellas con respecto á la variable x y sus dependientes y, P'' y P', esto es, haciendo que los referidos miembros sean unos minimos para considerar de este modo el caso mas desfavorable á la resistencia de los pies derechos. Aunque tal es el metodo que prescribe la cuestion, no lo seguiremos por la mucha complicacion que acarrea en la mayor parte de casos, y en su lugar supondremos que la junta MN de rotura corresponde á un arco de 60. grados contados desde el vertice en las bovedas de medio punto y semielipticas, porque hemos observado en efecto que proximamente es esta la situacion que sale para dicha junta por la doctrina de maximos y minimos. Admitido este supuesto, se tendrá $x = m - \frac{m^2}{\sqrt{3l^2+m^2}}$, $y = \sqrt{\frac{3l^4}{3l^2+m^2}}$; y pasemos yá á aplicar las formulas referidas á egemplos numericos, en donde se percibirá mejor el camino que deve seguirse en cada uno de ellos.

69. Haciendo constantemente tang. $f=\frac{1}{2}$ en la condicion (T), propongamonos por primer exemplo un arco de medio punto, cuya clave sea $\frac{1}{10}$ de la semiluz. Tendremos desde luego $m=l$, $x=\frac{1}{2}l$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.8660l$, $P''=yk+\frac{1}{3}xy=0.2309l^2$, $P'=\frac{MX}{k+x}=\frac{y^2(6k+x)}{12(k+x)}=0.1145l^2$, y las formulas (S), (T) y (V) convertidas en

$$v \geqq \sqrt{\frac{2P'(m-x)-2P''(l-y)}{k+x}}=0.30l \text{ - - - - - - - - - - } (8)$$

$$0.3v^2l+0.0577vl^2-0.0263l^3-0.1145hl^2+\tfrac{1}{16}h^2l+\tfrac{1}{24}h^3 \geqq 0. \text{ - - - - } (9)$$

$$-\tfrac{1}{3}v^3+\tfrac{1}{2}v^2(h+1.1l)+0.23094l^2-0.1145hl^2-0.0263l^3 \geqq 0 \text{ - - - - - - (10)}$$

Si el valor $v=0.30l$, sacado de la primera de estas formulas, lo substituimos en la segunda, y ordenamos los terminos de esta con respecto à las potencias de h, saldrà

$$\tfrac{1}{24}h^3+\tfrac{1}{16}h^2-0.1145h+0.0168 \geqq 0,$$

que considerada como una equacion, y tomando la raiz positiva y menor de las tres que tiene, da $h=0.14l$: lo cual quiere decir, que desde esta altura en adelante empieza la condicion (9.) à dar à v un valor mayor que el deducido de la (8). Substituyamos ahora en la misma condicion (9) por h, el valor $0.58l$ que convierte en un minimo la cantidad $-0.1145h+\tfrac{1}{16}h^2+\tfrac{1}{24}h^3$, y cuya expresion general es $h=-(m-x)+\sqrt{8D^2+(m-x)^2}$, segun se dixo en el num.° 66; y de la formula

$$0.3v^2+0.0577lv-0.0636l^2 \geqq 0,$$

que resulta con dicha substitucion, se saca $v=0.38l$ que es el maximo grueso que la condicion (9) puede dar. Finalmente, haciendo en la (10) $v=0.38l$, y despejando h se tiene

$$h \leqq \frac{0.1671l-0.0632l}{0.1145-0.0722}=\frac{0.1039l}{0.0423}=2.4l:$$

altura à la cual empieza à dar la condicion (10) el mismo grueso que la condicion (9) à la altura $h=0.58l$, y de consiguiente deverà consultarse solamente la condicion (10) en los casos de ser $h \geqq 2.4l$. Resulta, pues, de todo este calculo que el machon tendrà: el grueso $v=0.30l$, cuando su altura este entre $h=0$ y $h=0.14l$: el que saliere de la condicion (9), poniendo por h su valor total, siempre que sea $h>0.14l$ y $h<0.58l$: el espesor $v=0.38l$, estando la altura del machon contenida entre $0.58l$ y $2.4l$: ultimamente, el que salga de la condicion (10), substituyendo por h toda la altura de los estrivos, cuando esta sea mayor que $2.4l$; de forma que siendo h infinita sacaremos $v \geqq \sqrt{0.2290l^2}=0.47l$, y à este supuesto corresponde el mayor grueso de machones en la boveda propta

70. Sea el segundo exemplo una boveda simieliptica rebajada que tenga por clave un decimo de la luz, y por montea $\frac{1}{2}l$: con esto sera $x = m - \frac{m^2}{\sqrt{3l^2+m^2}} = 0.3614l$,

$y = l\sqrt{\frac{3l^2}{3l^2+m^2}} = 0.9671l$, $P'' = yk + \frac{1}{3}xy = 0.2117l^2$; $P' = \frac{y^2(6k+x)}{12(k+x)} = 0.1602l^2$,

$$v \geqq \sqrt{\frac{2P'(m-x) - 2P''(l-y)}{k+x}} = 0.25l, \text{ - - - - - - - - - - - - - - (11)}$$

$$0.23078v^2l + 0.08034vl^2 - 0.0139l^3 - 0.1602l^2h + 0.0173lh^2 + \tfrac{1}{24}h^3 \geqq 0, \text{ - - - - - (12)}$$

$$-\tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{1}{2}v^2(h + 0.4614l) + 0.2117l^2v - 0.0139l^3 - 0.1602l^2h \geqq 0. \text{ - - - - (13)}$$

Haciendo con estas condiciones el mismo calculo seguido en el primer exemplo, deduciremos de él que si la altura del machon no pasa de $0.12l$, bastarà el grueso $v = 0.25l$ sacado de la condicion (11); pero en caso de ser $h > 0.12l$, y $h < (m-x) + \sqrt{8P' + (m-x)^2} = l$ con corta diferiencia, nos valdremos de la condicion (12) para determinar dicho grueso poniendo por h toda la altura; y en tercer lugar, se darà à los machones el grueso $v = 0.56l$ que sale de la condicion (12) substituyendo por h el valor $h = (m-x) + \sqrt{8P' + (m-x)^2} = l$ correspondiente al minimo de $-P'h + \frac{(m-x)}{8}h^2l + \frac{1}{24}h^3$, siempre que la altura sea igual ó mayor que la semiluz. Aqui, al substituir $v = 0.56l$ en la condicion (13) para saber desde que altura empieza esta condicion à dar al machon un grueso mayor que la (12), encontramos positivo su primer miembro, y de consiguiente negativo el valor de h si nos empeñamos en despejarlo: lo cual prueba que en caso ninguno puede tener lugar aquella circunstancia. Por eso decimos que desde $h = l$ hasta el infinito, deve darse al machon el expesor $v = 0.56l$; y en esta boveda se verifica yà lo anunciado en el num.° 66, à saber: que no siempre los estribos necesitan aumentar de grueso por aumentar de altura.

71. En los dos exemplos pasados se hallan reunidas todas las particularidades y circunstancias dignas de notar que pueden ocurrir en la determinacion del grueso de machones, cuando las bovedas son elipticas ó de medio punto: por lo tanto, es excusado poner mas exemplos numericos de esta clase de arcos, y asi pasaremos à hablar de los escarzanos. Si el angulo forma-

do por los arranques del arco y la vertical es mayor que el de 60 grados, será necesario para deducir las formulas poner por x é y las coordenadas correspondientes al punto del intrados, cuya normal, ó junta de lecho forma el angulo de 60 grados con la vertical, y cuyas expresiones son $x = \frac{l^2+m^2}{4m}$, $y = (\frac{l^2+m^2}{4m})\sqrt{3}$, pues la curba intrados será parte de un circulo cuyo radio $= \frac{l^2+m^2}{2m}$: hecha esta substitucion, se seguirá en todo lo demas el mismo proceder que en los numeros 69 y 70. Si las juntas de arranque no llegan á formar con la vertical el angulo de 60 grados, lo que en esta especie de bovedas es lo mas regular, se hará $x=m$, $y=l$; con cuya substitucion la formula (S) desaparece, y las dos (T) y (V) toman la forma

$$\tfrac{1}{2}x^2(k+m) + xP'\,\text{tang.}f - P'h + \tfrac{1}{24}h^3 \geqq 0, \text{ - - - - - - - - - - (U)}$$

$$-\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2(k+m+h) + xP'' - P'h \geqq 0: \text{ - - - - - - - - - - - (X)}$$

no olvidando que para estos casos es $P' = \frac{l^2(6k+m)}{12(k+m)}$, $P'' = lk + \frac{1}{3}lm$. Apliquemos estas condiciones á dos arcos escarzanos que sean el uno de 120 grados y el otro de 60, esto es, que los arranques del primero formen con la vertical 60 grados, y los arranques del segundo 30 grados: supongamos, ademas, que la clave es en ambos la decima parte de la semiluz como en los exemplos anteriores.

72. En el primer caso tendremos $m = l\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}60^\circ = l\,\text{tang.}\,30^\circ = 0.5773l$, $P' = 0.1448l$, $P'' = 0.2924\,l^2$, y las condiciones (U) y (X) transformadas en

$$0.3386x^2l + 0.0724xl^2 - 0.1448l^2h + \tfrac{1}{24}h^3 \geqq 0, \text{ - - - - - - - - (14)}$$

$$-\tfrac{2}{3}x^3 + x^2(0.3386l + 0.5l) + 0.2924\,l^2x - 0.1448l^2h \geqq 0 \text{ - - - - - (15)}$$

Substituyendo en la primera $h = \sqrt{8P'} = 1.07l$, que es el valor correspondiente al minimo de $-P'h + \frac{1}{24}h^3 = -0.1448l^2h + \frac{1}{24}h^3$, sale

$$0.3386x^2 + 0.0724xl - 0.1049l^2 \geqq 0,$$

que da $x \geqq 0.46l$: pongamos este valor en la condicion (15), y despejando h se tiene

$$h \leqq \frac{0.1133l}{0.1448 - 0.1058} = 2.9l:$$

asi, pues, en la determinacion del grueso de machones para la boveda propuesta, se empleará

la formula (14) si $h \leqq 1.07l$: desde esta altura hasta $2.9l$, se dará el grueso $v = 0.46l$: y siendo h mayor que $2.9l$ se usará de la formula (15). De consiguiente, en esta boveda sucede lo mismo que en la de medio punto del num.° 69, á saber: que su mayor grueso corresponde á una altura infinita, y es $v = \sqrt{0.2896ll} = 0.53l$, contando solamente con los terminos de la formula (15) que contienen h.

73 Para el segundo arco ucarzano sale $m = l \text{ tang. } \frac{1}{2}30° = l \text{ tang. } 15° = 0.2679l$, $P'' = 0.1893ll$, $P' = 0.1966ll$,

$$0.1839v^2l + 0.0983vl^2 - 0.1966hl^2 + \tfrac{1}{24}h^3 \geqq 0, \text{-------} (16)$$

$$-\tfrac{2}{3}v^3 + v^2(0.1839l + 0.5h) + 0.1893vl^2 - 0.1966h \geqq 0. \text{-------} (17)$$

Haciendo $h = \sqrt{8P'} = 1.25l$, la condicion (16) queda convertida en

$$0.1839v^2 + 0.0983lv - 0.1639l^2 \geqq 0,$$

que da $v = 0.72l$; y por que este valor substituido en la (17), hace positivo su primer miembro, se sigue que solo en el caso de ser $h < 1.25l$, hay necesidad de emplear la condicion (16) para determinar v; y en los demas casos, en que h pase de $1.25l$, bastara hacer $v = 0.72l$, aunque sea infinita la altura.

74. Es necesario advertir que el valor $v = 0.46l$ que aparece en el num.° 72, sacado de la formula (14) haciendo $h = 1.07l$, no conviene con lo que notamos en el num.° 60, pues la mitad de esta altura sale mayor que el grueso $v = 0.46l$, deviendo ser menor ó á lo mas igual. Esto manifiesta que el movimiento contenido en aquella formula es imposible de verificarse con todas sus circunstancias, refiriendo el punto de rotacion á la altura $h = 1.07l$; pero conoceremos el verdadero limite del que no deve pasar h en la formula (14), substituyendo en esta $2v$ por h, pues en efecto todos los valores de h, que pasen de $2v$, dexaran de cumplir con la circunstancia referida en el num.° 60. Substituyendo, pues, $h = 2v$ en la formula (14) é igualando á cero su primer miembro tendremos

$$\tfrac{1}{3}v^3 + 0.3386vl - 0.2172l^2 = 0,$$

que da $v=0.45l$, y por lo mismo $h=0.90l$; y como se halla fuera de este limite la cantidad $h=1.07l$, sacada en el num.° 72 para tener el maximo grueso de v, se sigue de aqui que este maximo no es aplicable á la boveda propuesta, sino el valor correspondiente á la altura $h=0.90l$, que es $v=0.45l$. Estas son en realidad las dos cantidades que deviéramos haber puesto en lugar de $h=1.07l$ y $v=0.46l$; pero hemos dexado de hacerlo asi por lo poco que se diferencian entre si los dos valores $0.45l$ y $0.46l$, y tambien por no alterar el orden seguido en los otros exemplos, que ademas de ser mas uniforme y expedito, tiene la ventaja de proporcionar mayor solidez á la boveda. Por otra parte son raros los casos en que el valor de v dado por las formulas (T) y (U), sale menor que la mitad de la altura, cuando esta se hace igual á $-(m-n)+\sqrt{8p'+(m-n)^2}$, esto es, á la expresion de h que produce un maximo en v.

75 Siendo tales, cual hemos visto, las formulas necesarias para determinar con rigor y fundamento el grueso de los machones, ya nos hallamos en estado de poder hacer ver palpablemente la grande diferencia que hay de suponerlos compuestos de un solo trozo de piedra, ó de diferentes segun se verifica realmente en la practica. No hay duda que el primer supuesto viene á contenerse en la formula (V), borrando el termino $-\frac{2}{3}v^3$ originado de quitar al momento del machon el de la superficie FeE, Fig.ª 22: por consequencia, si refiriendonos á los cuatro exemplos discutidos en los num.s 69, 70, 72 y 73, consultamos solamente la formula (V), despues de hecha la supresion dicha, sacaremos para el primer exemplo $v=0.21l$, para el segundo $v=0.27l$, para el tercero $v=0.18l$, y para el cuarto $v=0.31l$, suponiendo en todos ellos $h=\frac{1}{2}l$; cuando por las formulas (T) y (U) que segun lo advertido en aquellos numeros son las que deben consultarse siendo $h=\frac{1}{2}l$, tendremos en el primer exemplo $v=0.37l$, en el segundo $v=0.42l$, en el tercero $v=0.35l$, y en el cuarto $v=0.49l$. No es pues de estrañar, comparando estos valores de v

con los cuatro primeros, que hasta ahora se hayan mirado con entera desconfianza los resultados dados por la teoria.

76. De todos los metodos graficos puestos en uso para hallar el grueso de machones, ninguno se aproxima mas á los resultados sacados por nuestras formulas, que uno cuyo origen es tan antiguo como desconocidos los fundamentos en que estriva. Consiste este metodo en dividir la curba intrados en tres arcos que abracen cuerdas iguales, y tomar despues por grueso la proyeccion horizontal de la cuerda que parte del arranque: de suerte que espresado analiticamente dicho grueso, viene á ser $x = \frac{2l^3}{3l^2+m^2}$ en las bovedas elipticas, y $x = 2\,\text{sen.}\,\frac{a}{3}\cos.\frac{2a}{3}.\frac{l}{\text{sen.}\,a}$ en las escarzanas, llamando $\underline{a}$ el angulo de arranque; y asi refiriendonos á las cuatro bovedas de los numeros 69, 70, 72 y 73, se tiene $x = 0.50l$, $x = 0.57l$, $x = 0.60l$, y $x = 0.65l$. Como en esta determinacion se prescinde de la altura de los machones, es preciso hacer tambien la misma abstraccion en nuestras formulas, refiriendolas á aquella altura que produzca el mayor grueso: y bajo este concepto, los valores de x sacados teoricamente son $x = 0.47l$, $x = 0.56l$, $x = 0.53l$, y $x = 0.72l$, como puede inferirse de lo notado en dichos numeros. Entre estos cuatro valores y los anteriores, no se advierte una diferencia notable, y mucho menos entre los correspondientes á las dos bovedas primeras, cuyos nacimientos son horizontales: circunstancia que autoriza mas el metodo mencionado, pues los antiguos rara vez empleaban otra especie de bovedas.

77. En las aplicaciones anteriores se ha caminado bajo el concepto de que los sillares eran cuadrados, por las razones espresadas en el num.º 59; pero si quisieramos suponer indeterminadas sus dimensiones, nos fuera facil hallar la forma que convenia á las condiciones, y de aqui inferir el modo de discutirlas. En efecto, supongamos que $\underline{p}$ sea la razon que existe entre la linea y altura de los sillares; y desde luego conoceremos que las condiciones (T) y (U), referidas á arcos escarzanos, deben aparecer asi:

$$\tfrac{1}{2}x^2(k+m) + xP'\,\text{tang.}\,f - P'h + \frac{p^2h^3}{24} \geqq 0,$$

$$-\frac{2}{3p}v^3+\frac{1}{2}v^2(k+m+h)+vP''-P'h \geqq 0,$$

no teniendo lugar en la primera sino solamente los valores de v que salgan mayores que $\frac{1}{2}ph$. Por exemplo: si el arco es el mismo que el del num.º 72, y suponemos $p=2$, tendremos las condiciones

$$0.3386v^2l+0.0724l^2v-0.1448l^2h+\frac{1}{6}h^3 \geqq 0, \text{ - - - - - - (18)}$$

$$-\frac{1}{3}v^3+v^2(0.3386l+\frac{1}{2}h)+0.2924l^2v-0.1448l^2h \geqq 0. \text{ - - - (19)}$$

Puesto que con substituir $h=\sqrt{\frac{8P'}{p^2}}=\sqrt{2P'}=0.531$ en la condicion (18), resulta para v un valor que no conviene con la circumstancia de ser $v>\frac{1}{2}ph=0.531$, como nos cercioraremos haciendo el calculo, inferiremos de aqui que el mayor grueso que pueda dar esta condicion, corresponde á la suposicion $v=\frac{1}{2}ph$, y asi poniendo $v=\frac{1}{2}ph$, la condicion (18) se trasforma en la igualacion

$$\frac{1}{6}v^2+0.3386lv-0.0724l^2=0$$

De donde sale $v=0.18l$, $h=0.18l$. Asi, pues, desde $h=0$ hasta $h=0.18l$, deve emplearse la condicion (18) para determinar el grueso: desde $h=0.18l$, hasta $h=0.48l$, que es la altura á la cual empieza la condicion (19) á dar un valor mayor á v que la condicion (18), se hará $v=0.18l$; y desde $h=0.48l$ hasta el infinito, se empleará la condicion (19). Con que si tenemos $h=\frac{1}{2}l$, sera $v=0.19l$, valiendonos por consiguiente de la condicion (19); en vez de que la condicion (14) del num.º 72, nos daria para igual caso $v=0.35l$, esto es, una cantidad casi doble de la otra. De esta manera se vé como la buena ó mala calidad de los materiales influye de un modo notable en el expesor que deven tener los machones, y se pueden explicar los diferentes fenomenos que presentan bovedas de igual figura y dimensiones, undiendose las unas al paso que las otras permanecen sin hacer sentimiento ninguno. Hemos de observar tambien que con unos mismos materiales puede variar la calidad de la mamposteria, segun la mayor ó menor trabazon que tengan unas con otras las piedras

que entran en su formacion; y puede efectuarse ~~....~~ tan mal, que sin embargo de ser grande la linea de estas con respecto á su altura, resulte para el calculo como si fuese realmente $p=0$, con tal que los sillares, ó piedras que se sobreponen, formen columnas rectas no interrumpidas, haciendo que sus vases coincidan perfectamente unas con otras. Pero ya insinuamos en el num.º 57, y volvemos á repetir aqui, que lejos de construirse en caso alguno la mamposteria con tan defectuosa colocacion, se tiene al contrario todo el esmero posible en que las piedras se crucen y traben perfectamente unas con otras; y solo nos hemos detenido en las reflexiones que anteceden, para que se vea palpablemente la razon de esta practica tan recibida, y se advierta al mismo tiempo que pueden muy bien someterse al calculo elementos que parecen estar fuera de su dominio. Por consiguiente, la cantidad p no puede ser nunca menor que 1, segun vimos en el num.º 59, y mucho menos igual á cero, sino es que de intento se trate de edificar la boveda contra todas las reglas de buena construccion

78. Hasta aqui todo lo tratado en este capitulo se ha reducido á impedir que los machones puedan girar al rededor de los puntos de sus aristas exteriores; y para completar el objeto propuesto en él nos falta discutir la condicion (M) que comprende el movimiento mixto de primera especie. Si observamos que la parte mas flaca del machon es la hilada CD (Fig.ª 23) mas proxima al arranque, el trozo expresado por M'' en aquella condicion será igual á la superficie AC-D.G.BA, y el angulo $\alpha''=90^{\circ}$ quedando el termino $\frac{M'X'}{k+x'}$ de la misma forma que en los numeros anteriores. Portanto, si el extrados es una recta horizontal, como hemos considerado en los demas casos, y admitimos los supuestos del num.º 65, se tendrá:

$$P'=\frac{M'X'}{k+x'}=\frac{y^2(6k+x)}{12(k+x)},\ P''=M'=ky+\tfrac{1}{3}xy,\ M''=M'+4(k+m)=P''+4(k+m),$$

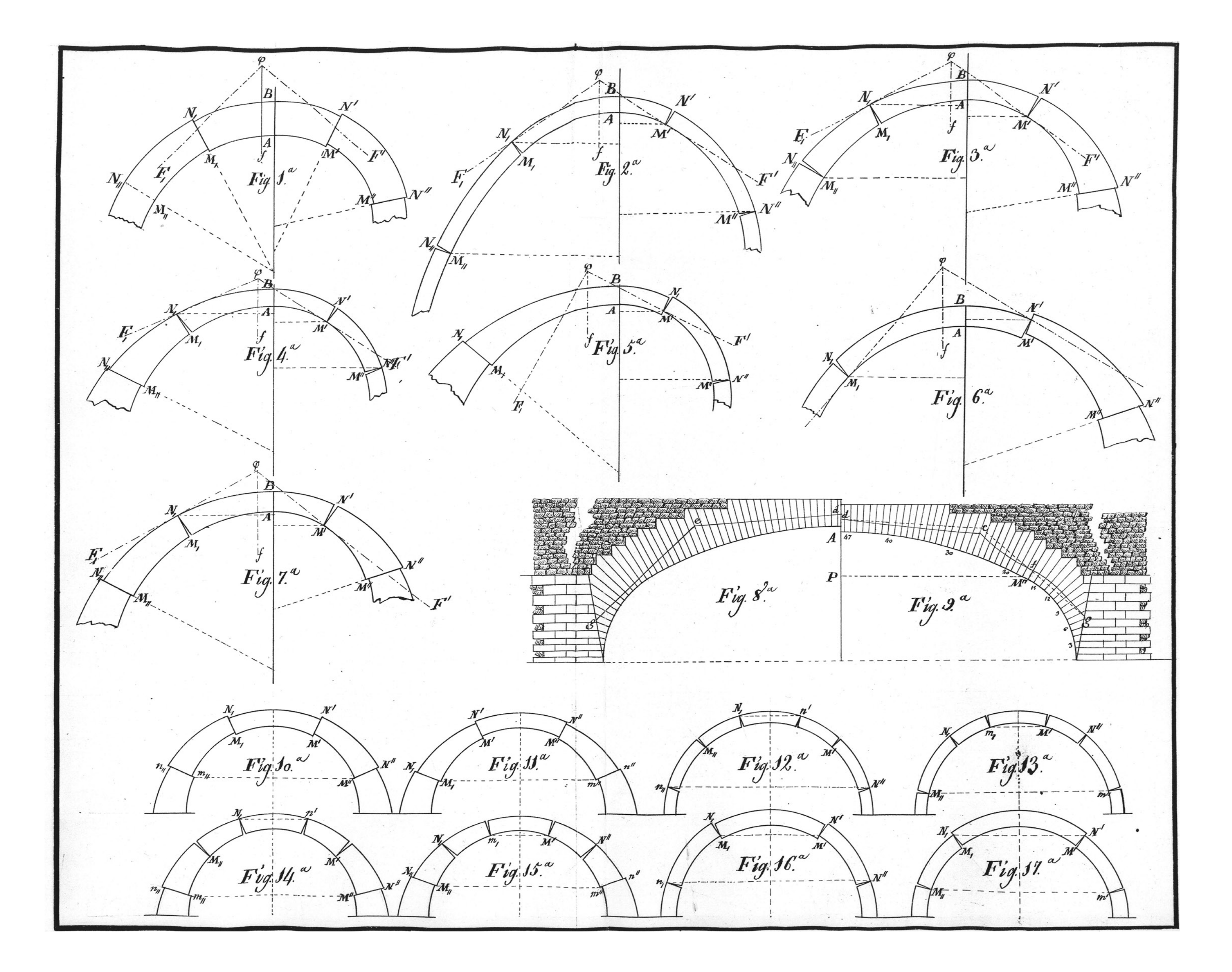
con lo cual la condicion (M) se convierte, despejando v, en

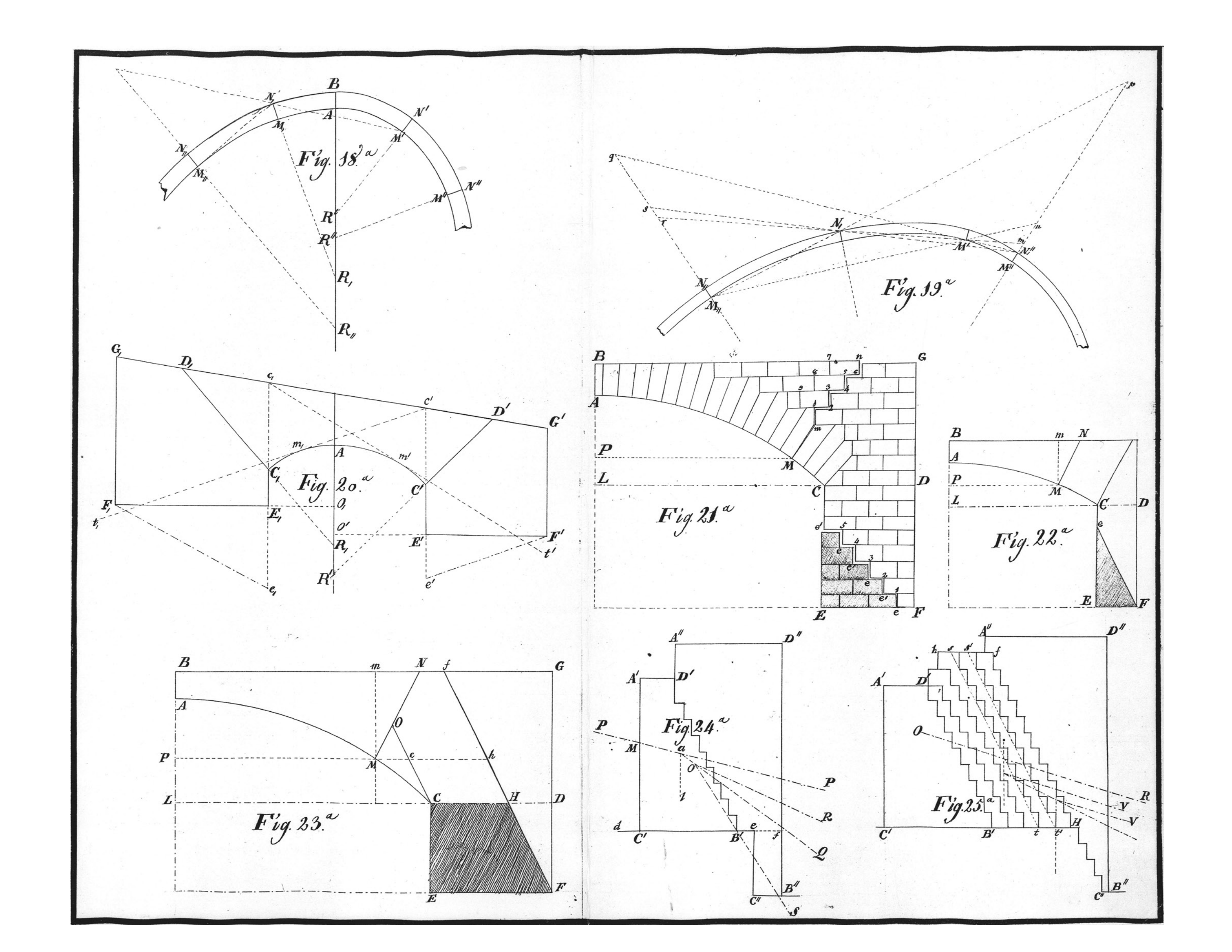
$$v \geq \frac{P' - P'' \tan f}{(K+m)\tan f} \; ; \text{------} (Z)$$

valor que se preferirá á los sacados de las otras formulas, cuando sea mayor que ellos. No me detengo en aplicar esta condicion á ningun exemplo, por no presentar su discusion la menor dificultad: bastará tener presente que en las bovedas elipticas debe hacerse $x = m - \frac{m^2}{\sqrt{3l^2+m^2}}$, $y = \sqrt{\frac{3l^4}{3l^2+m^2}}$, y en las escarzanas $x = \frac{l^2+m^2}{4m}$, $y = \left(\frac{l^2+m^2}{4m}\right)\sqrt{3}$, cuando el angulo de arranque pase de 60 grados, pues en el caso contrario se hará $x = m$ é $y = l$: todo lo cual es conforme á lo que se dixo en los num. 68 y 73. Es de advertir que en la formula (Z) influye mucho mas que en las otras, cualquiera pequeña alteracion que se haga en la friccion; por lo que será mui conveniente averiguar primero el verdadero valor de esta por medio de un experimento directo, antes de pasar á hallar la expresion de v por la formula (Z).

79. Por lo visto, las diferentes formulas que llevamos desenvueltas para determinar el grueso de machones, son solo aplicables á bovedas de cañon seguido; pero si ocurriese hacer la misma investigacion con bovedas de media naranja, se las considerará como de cañon seguido, y con iguales dimensiones y figura que el corte vertical dado en direccion del exe de rebolucion, á fin de evitar el tener que discutir nuevas formulas. Este proceder se puede emplear con toda seguridad, atendiendo á que con él sale constantemente un grueso mayor que el puramente necesario: de cuya verdad nos convenceremos desde luego, si á la media naranja se substituye una seccion suya, hecha del modo que se advirtió en el num. 2, y se inscrive á esta seccion una boveda de cañon seguido con las dimensiones anteriormente mencionadas, dandola ademas el fondo que tiene, por el extradós la dovela que separa en la seccion el trozo superior que empuja, del inferior que resiste al empuje; y si echamos de ver por ultimo, que el primer trozo de la seccion es evidentemente menor, y el segundo mayor, respectivamente, que los separados por la misma dovela correspondientes á la boveda de cañon seguido inscripta.

Láminas


Fig. 1.ª
φ B A f N, N' M, M' F, F' N,, N'' M,, M''
Fig. 2.ª
φ B A f N, N' M, M' F, F' N,, N'' M,, M''
Fig. 3.ª
φ B A f N, N' M, M' F, F' N,, N'' M,, M''
Fig. 4.ª
φ B A f N, N' M, M' F, F' N,, N'' M,, M''
Fig. 5.ª
φ B A f N, N' M' F, F' N'' M''
Fig. 6.ª
φ B A f N, N' M, M' N'' M''
Fig. 7.ª
φ B A f N, N' M, M' F, F' N,, N'' M,, M''
Fig. 8.ª
Fig. 9.ª
d A P e g 47 40 30 20 15 12 5 6 3 f M''
Fig. 10.ª
Fig. 11.ª
Fig. 12.ª
Fig. 13.ª
Fig. 14.ª
Fig. 15.ª
Fig. 16.ª
Fig. 17.ª


Fig. 18.a
Fig. 19.a
Fig. 20.a
Fig. 21.a
Fig. 22.a
Fig. 23.a
Fig. 24.a
Fig. 25.a

Lista de erratas en el Manuscrito

Esta lista contiene errores de escritura o inexactitudes encontradas en el texto del Manuscrito. La notación "p.15 línea 13 desde abajo" significa que el error se encuentra en la página 15 en la línea 13 desde la parte inferior de la página.

	Dice	*Debe decir*
p.6 línea 7 desde abajo	$N_{\prime}M''$	$N_{\prime}M'$
p.7 línea 9 desde arriba	$M'M''$	$M'N''$
p.15 línea 3 desde arriba	$M''N''$	$M''N'$
p.15 línea 13 desde arriba	$M_{\prime\prime}N'$	$M_{\prime}N'$
p.16 línea 5 desde abajo	N'	N''
p.23 línea 5 desde arriba	$N_{\prime}$ y M'	$N_{\prime}M'$
p.23 línea 6 desde arriba	$M'N'$	$M''N'$
p.26 línea 12 desde abajo	dy/dx	dx/dy
p.28 línea 3 desde arriba	$\mathrm{sen}(\alpha'+f)$ y $\mathrm{sen}(\alpha''-f)$	$\mathrm{sen}(\alpha'+f)\mathrm{sen}(\alpha''-f)$
p.28 línea 1 desde abajo	$M'=-M_{\prime\prime}$	$M'=-M''$
p.29 línea 9 desde abajo	Fig.ª1ª	Fig.ª10ª
p.30 línea 3 desde arriba	$\pi\left(rK+\frac{1}{2}K^2\right)\mathrm{tang}f$	$\frac{1}{2}\pi\left(rK+\frac{1}{2}K^2\right)\mathrm{tang}f$
p.30 línea 4 desde arriba	π	$\frac{1}{2}\pi$
p.30 línea 6 desde arriba	$\pi\mathrm{tang}f-\alpha'\cot(\alpha'+f)=0$	$\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f-\alpha'\cot(\alpha'+f)=0$
p.30 línea 7 desde arriba	$\cos(\alpha'+f)=\sqrt{\pi\mathrm{tang}f}$	$\cos(\alpha'+f)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f}$
p.30 línea 7 desde arriba	$\sqrt{(1-\pi\mathrm{tang}f)\pi\mathrm{tang}f}=\alpha'$	$\sqrt{(1-\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f)\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f}=\alpha'$
p.30 línea 7 desde arriba	$\sqrt{(1-\pi\mathrm{tang}f)\pi\mathrm{tang}f}+f$	$\sqrt{(1-\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f)\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f}+f$
p.30 línea 9 desde arriba	$\sqrt{\pi\mathrm{tang}f}\ldots\left(\sqrt{(1-\pi\mathrm{tang}f)\pi\mathrm{tang}f}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f}\ldots\left(\sqrt{(1-\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f)\frac{1}{2}\pi\mathrm{tang}f}\right)$
p.35 línea 8 desde arriba	$M\varphi N'$	$M'\varphi N'$
p.36 línea 12 desde arriba	$\ldots(M''-M)\ldots-M'(u''+y)$	$\ldots(M''-M')\ldots-M'(u''-y')$
p.45 línea 2 desde arriba	(G)	(E)
p.46 línea 4 desde arriba	$\ldots\frac{\left(rK+\frac{1}{2}K^2\right)\alpha'\mathrm{sen}\alpha'-\ldots}{K+r-r\cos\alpha'}$	$\ldots\frac{\left(rK+\frac{1}{2}K^2\right)r\alpha'\mathrm{sen}\alpha'-\ldots}{K+r-r\cos\alpha'}$

	Dice	*Debe decir*
p.47 línea 6 desde arriba	Fig.[as]10[a], y 11[a]	Fig.[as]12[a], y 13[a]
p.48 línea 3 desde abajo	Fig.[a]10[a]	Fig.[a]12[a]
p.48 línea 2 desde abajo	Fig.[a]11[a]	Fig.[a]13[a]
p.51 línea 5 desde abajo	$N'_{\shortparallel}M_{\shortparallel}$	$N_{\shortparallel}M_{\shortparallel}$
p.53 línea 1 desde arriba	Fig[s].12[a] y 13[a]	Fig[s].14[a] y 15[a]
p.53 línea 3 desde arriba	figura 12	figura 14
p.53 línea 4 desde arriba	Fig.[a]13[a]	Fig.[a]15[a]
p.53 línea 5 desde arriba	Fig[a].12[a] ó á la Fig[a].13[a]	Fig[a].14[a] ó á la Fig[a].15[a]
p.53 línea 6 desde arriba	(K) $M'=0$ … (L) $M_{\prime}=0$	(K) $M_{\prime}=0$ … (L) $M'=0$
p.55 línea 9 desde abajo	M'	$M_{\prime}$
p.56 línea 7 desde arriba	$N'N''M''N'$	$N'N''M''M'$
p.57 línea 8 desde arriba	$M_{\shortparallel}M''M_{\prime}M'_{\prime}$	$M_{\shortparallel}M''M_{\prime}M'$
p.57 línea 9 desde abajo	(7)	(P)
p.57 línea 8 desde abajo	$N_{\prime}N_{\prime}$	$M_{\prime}N_{\prime}$
p.57 línea 6 desde abajo	(7)	(P)
p.66 línea 1 desde arriba	$\frac{M'X}{K+x'}$	$\frac{M'X'}{K+x'}$
p.71 línea 12 desde abajo	*MCEFGNM*	*MCHFGNM*
p.72 línea 13 desde arriba	αQ	aQ
p.72 línea 7 desde abajo	$OS = v''\cos\lambda' - h'\text{sen}\lambda'$	$OS = v''\cos\lambda' - h''\text{sen}\lambda'$
p.74 línea 7 desde arriba	$v''(R'+P')-h''P'$	$v''(R'+P'')-h''P'$
p.76 línea 5-6 desde arriba	movimiento de traslacion	movimiento de rotacion
p.77 línea 7 desde abajo	$M''Z' =$	$M''Z'' =$
p.81 línea 4 desde abajo	$y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$y=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,l$
p.84 línea 8 desde arriba	(F)	(T)
p.84 línea 9 desde arriba	$\ldots - Ph + \frac{1}{24}h^3 \geq 0$	$\ldots - P'h + \frac{1}{24}h^3 \geq 0$
p.84 línea 10 desde abajo	$P' = 0.1448l$	$P' = 0.1448l^2$
p.85 línea 1 desde abajo	$\frac{1}{3}v^3$	$\frac{1}{3}v^2$
p.87 línea 2 desde abajo	(T) y (U)	(U) y (X)


ISBN 978-84-9728-613-8
9 788497 286138